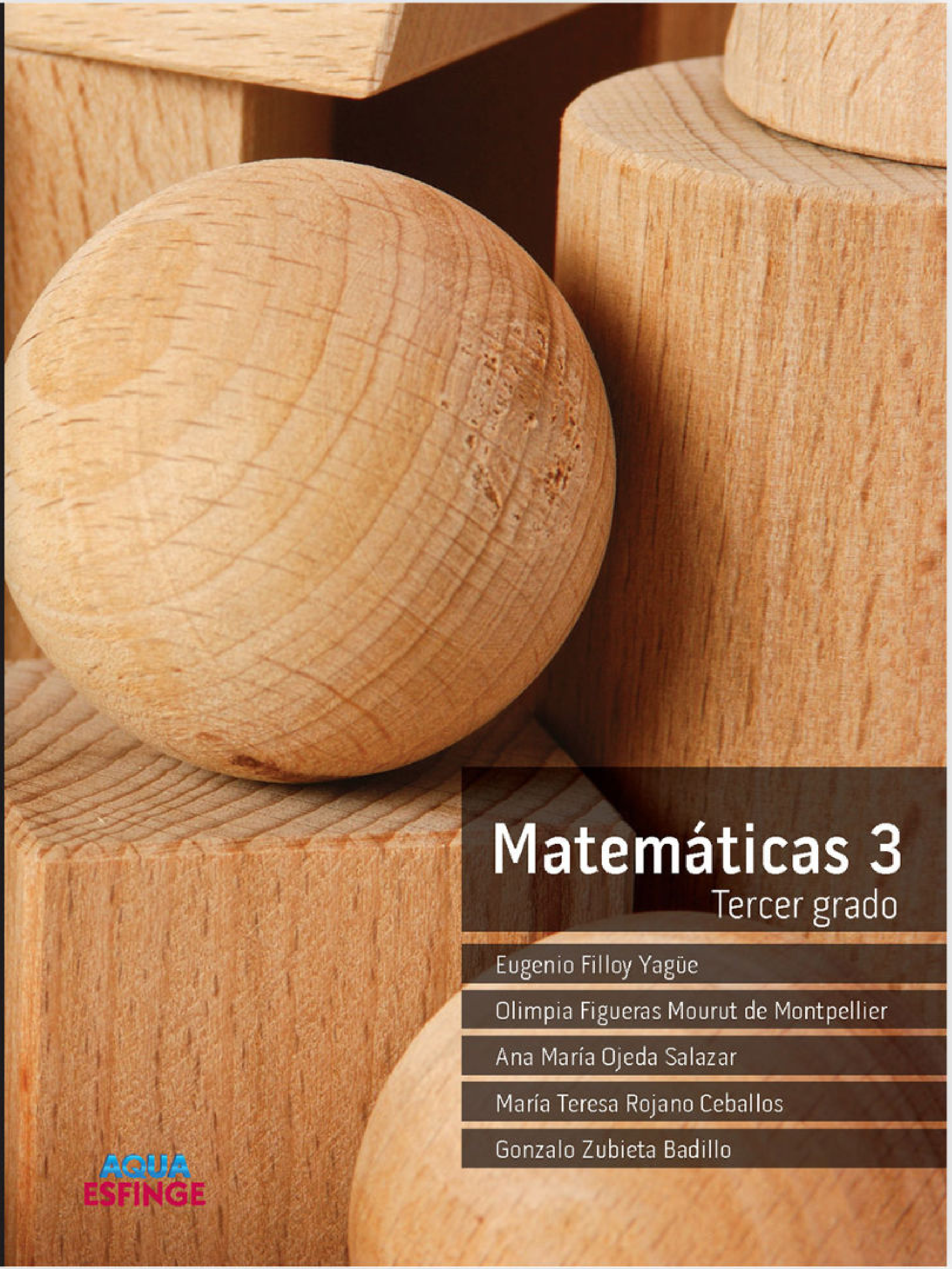


Matemáticas 3
Tercer grado

Eugenio Filloy Yagüe
Olimpia Figueras Mourut de Montpellier
Ana María Ojeda Salazar
María Teresa Rojano Ceballos
Gonzalo Zubieta Badillo

AQUA ESFINGE

Dirección general : Gabriel Torres Messina
Dirección editorial de Educación Básica : Rosa María Núñez Ochoa
Coordinación editorial Ciencias: Leoncio Montiel Mejía
Edición: Verónica Pineda Luna
Diseño de portada: Krystel Galván Hernández
Diseño de interiores: De Campomanes & Asociados
Diagramación y adaptación: Miguel Lomelí Soto
Revisión técnica: Andrés Ruiz Esparza Pérez
Corrección: Hilda Maritza Sánchez Villanueva y Fabián Guerrero
Jefa de iconografía: Eliete Martín del Campo Treviño
Asistente de iconografía: Guadalupe Sánchez
Ilustraciones: Miguel Macías y Miguel Lomelí Soto
Ilustraciones de entradas de bloque: Dimage Creativos
Fotografía: FotoDisk, Shutterstock images y archivo Esfinge

Colaboración especial: Verónica Rosainz Bonilla
Los autores son miembros del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV). La escritura de las lecciones presentes en este libro son resultado de las investigaciones que se elaboran en el Departamento de Matemática Educativa.

Matemáticas 3. Serie Aqua

ISBN: 978-607-10-0595-3 Edición revisada

Primera edición: 2014
Octava reimpresión: 2019

Impreso en México
Printed in Mexico

Presentación del libro

Esta obra tiene el doble fin de ser libro de texto para el alumno y medio para que el docente conduzca el proceso hacia el logro de los propósitos matemáticos planteados para el tercer grado de secundaria.

Los contenidos matemáticos se inician a partir de conocimientos adquiridos para introducir situaciones problemáticas. Mediante su indagación y la búsqueda de soluciones, se presentan conceptos nuevos o nociones ya estudiadas en otro nivel de abstracción. Se pretende fomentar la comunicación entre padres, docentes y estudiantes: el análisis colectivo e individual de las distintas formas de llegar a un resultado y, además, la contrastación de hipótesis iniciales así como las respuestas obtenidas por medio de razonamientos.

La tecnología se usa con diferentes niveles y acercamientos: desde su consideración como una herramienta cognitiva, hasta su utilidad para comprobar resultados encontrados por otros medios. La calculadora y la hoja de cálculo se emplean para ampliar la gama de situaciones que se pueden estudiar en clase con el uso de lápiz y papel, lo cual favorece la producción de nuevas interrogantes.

Por último, la interacción en el aula durante el desarrollo de las actividades propuestas en las lecciones del libro, las que se generen a partir del interés de los educandos o del docente (o de ambos), son la vía para la consolidación del conocimiento matemático, construido con las aportaciones de todos en el salón de clases.

Los autores

Presentación para el alumno

Difícilmente puede uno imaginar cómo sería nuestra vida diaria sin las aplicaciones de la matemática, en la diversidad de campos como la ingeniería, las ciencias naturales, las ciencias sociales, la medicina, etc., ¡la matemática es una herramienta esencial!

Te proponemos este libro para que conozcas más matemáticas y adquieras la forma disciplinada de pensar que se desarrolla con su aprendizaje y lo apliques tanto a la resolución como a la identificación de problemas.

El libro está organizado en cinco bloques, cada uno abarca temas de problemas multiplicativos, figuras y cuerpos, medida, proporcionalidad y funciones, nociones de probabilidad, análisis y representación de datos. Cada tema está desarrollado por lecciones en las cuales te proponemos actividades que requieren confirmar tus conocimientos anteriores para aplicarlos ante nuevas situaciones y preguntas. Asimismo, aprenderás otros conocimientos y procedimientos matemáticos que te ayudarán a resolver nuevos problemas.

También te proponemos que desarrolles buena parte de esas actividades con otro compañero, en equipos, o bien con todo el grupo, así tendrás la oportunidad de comunicar tus ideas y resultados, y conocer otros puntos de vista.

Presentación para el profesor

Este libro pretende ser un medio para la consecución del objetivo de su diaria labor en el aula: atraer al alumno hacia el conocimiento matemático e interesarlos cada vez más en él.

Los tres ejes temáticos que recorren la obra —sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, y manejo de la información— se presentan en cinco bloques, cada uno de los cuales agrupa temas de esos ejes.

El diseño de las lecciones hace énfasis en la aplicación de conocimientos previos para preparar la introducción de los nuevos, en la integración de éstos y en su aplicación a la resolución de problemas (entre otros, de la vida real); y en la discusión, comparación y comunicación de procedimientos y resultados. En las actividades que componen cada lección, se ha promovido la interacción en el aula en torno al conocimiento matemático con el fin de incentivar el desempeño autónomo de cada alumno.

En algunas lecciones se propone el uso de tecnología, con calculadoras, hojas de cálculo y simulaciones, lo cual permite tratar situaciones y problemas diferentes a los presentados para resolver con lápiz y papel. Sabedores de que los estudiantes podrían usar cotidianamente las tecnologías digitales, aspiramos a hacer de ellos herramientas más eficientes para el logro de las metas educativas.

Índice

Bloque III 106

Bloque IV 156

Bloque V 222

Dosificación

Bloque I

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas	1
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	2
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada	3
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad	4
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas	5
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	6
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación	7

Bloque II

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	1
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras	2
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	3
Manejo de la información	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	4
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	5
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	6

Bloque III

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones	1
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas	2
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales	3
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos	5
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera	6
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)	7

Bloque IV

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	1
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	2
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	3
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo	4
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente	5
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa	6
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión	7

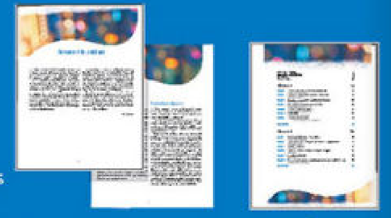
Bloque V

Eje	Tema	Contenido	Lección
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada	1
Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto	2
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides	3
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	5
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	6

Conoce tu libro

Estructura general

A continuación te presentamos las secciones que integran tu libro.



Presentación del libro, para el alumno y el profesor

Índice

Entradas de bloques (5)

Dosificación de los contenidos

Aprendizaje esperados

Competencias que se favorecen

Lección

Evaluación por bloque

Bibliografía

Secciones

Para abordar los contenidos del libro, los bloques se dividen en lecciones. Para que sigas paso a paso cómo está organizada una lección, te presentamos las partes que la conforman.

Conocimientos previos
Recuperación de conocimientos previos, pueden ser actividades o alguna explicación de lo que se va a estudiar en el bloque, todas las lecciones los contienen.

Situación problemática
Puede ser algún problema de la vida cotidiana para resolver, o algún ejemplo.

Comprendamos
En esta sección se presentan los fundamentos y conceptos matemáticos como definiciones, métodos e interpretaciones que te ayudarán a comprender mejor los conocimientos recién adquiridos por medio de la ejemplificación y la contextualización.

Integremos
Aquí podrás incorporar tus conocimientos matemáticos a diferentes situaciones e incluso profundizar en la relación de estos conocimientos con otras disciplinas.

Actividades: individuales, en parejas en o de grupo
Su objetivo es que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos, desarrolle un pensamiento matemático y adquiera habilidades de trabajo individual, en pareja y grupal.

Apliquemos
Se te plantea un problema que resolverás al utilizar los conocimientos adquiridos en secciones anteriores.

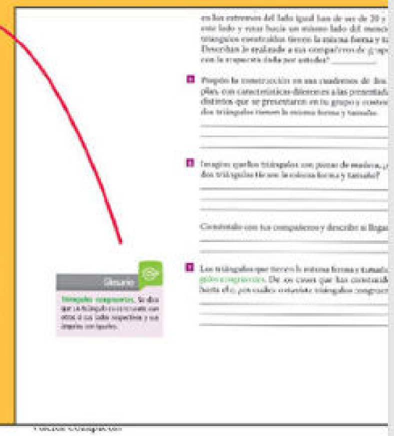
Los pies de figura establecen la relación entre el texto y la imagen para reforzar el aprendizaje.

Evaluación
Se encuentra al final de cada bloque, en ella se evaluará los conocimientos adquiridos y qué tanto se han cumplido los aprendizajes esperados del bloque.

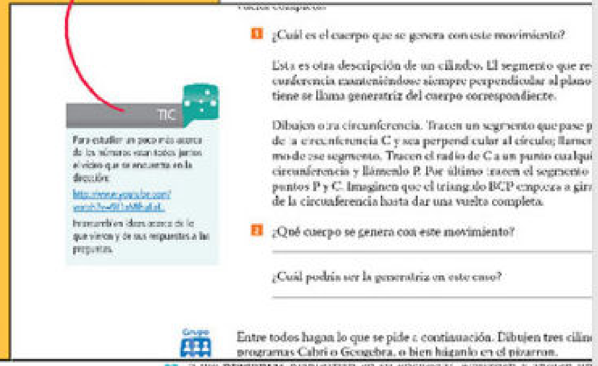
Recursos didácticos de apoyo:

Son elementos que no forman parte de la estructura central del libro pero sirven para profundizar en los conceptos que estás estudiando, relacionarte con otras áreas del conocimiento, explorar recursos electrónicos y multimedia o presentarte lecturas interesantes.

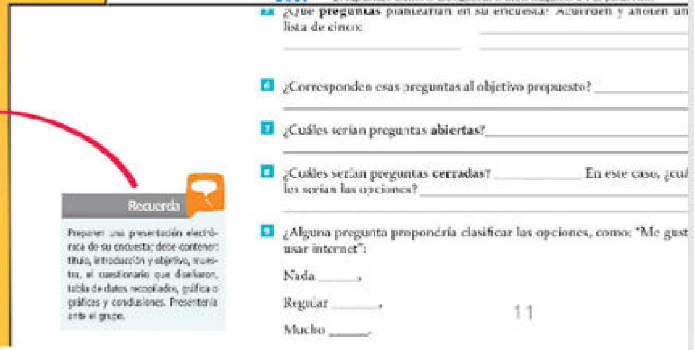
Glosario:
Contribuye a que profundices en los conocimientos y a que conozcas el significado de algunos términos.



TIC
En esta sección utilizarás la tecnología y la Internet para profundizar en los contenidos del libro.



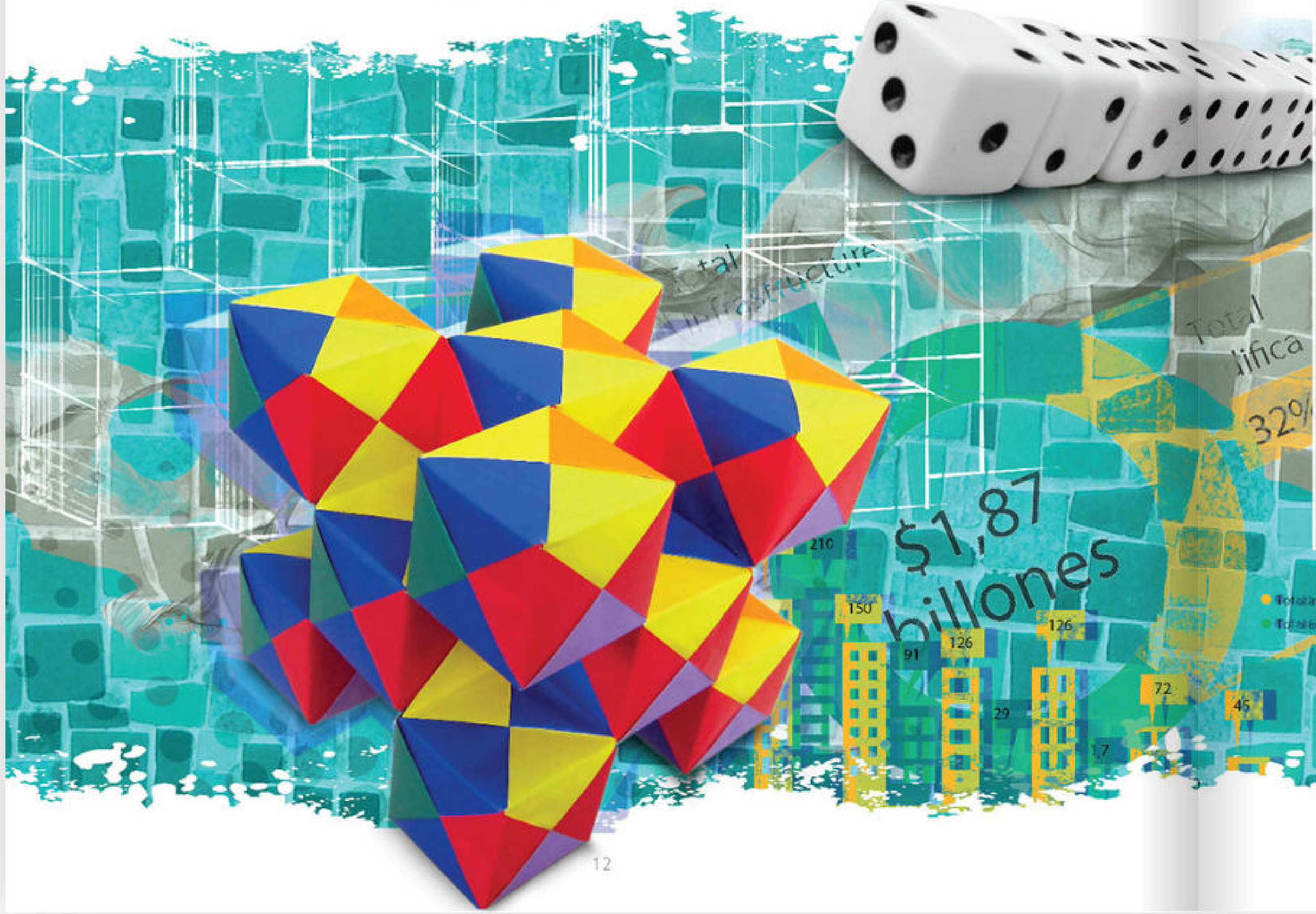
Recuerda
Contiene información vista con anterioridad para reforzar su aprendizaje y ayudar al alumno a identificar cuándo debe recurrir a ella.



Bloque I

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas	1	1	
Forma espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	2	2	
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada	3	3	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad	4	4	
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas	5	5	
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	6	6	
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación	7	7	

Lección 1

Resolución de ecuaciones cuadráticas sencillas

En primero y segundo grados de secundaria aprendiste a resolver problemas con ecuaciones lineales usando operaciones inversas. En este curso veremos cómo resolver ecuaciones no lineales por medio de esas operaciones.

En esta lección aprenderás a utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas usando procedimientos personales u operaciones inversas.

Conocimientos previos

1 En pareja, lean el siguiente problema y realicen y respondan lo que se pide: ¿Cuánto mide el lado del fondo de una piscina de forma cuadrada cuya área es de 400 m^2?

a) Representen con la letra d la medida del lado del fondo de la piscina y escriban la ecuación que representa el problema.

b) ¿Qué número elevado al cuadrado da 400?

c) ¿Existe algún otro número que elevado al cuadrado dé 400?, ¿cuál?

d) ¿Cuál de esos números es la respuesta al problema de la piscina?

$d =$ ________ m

e) ¿Cuál es la operación contraria a elevar al cuadrado un número?

Comenten en grupo sus respuestas.

Situación problemática

Pareja

1 Lean el siguiente problema y respondan.
La casa de Juan tiene dos recámaras. El área de la segunda es de 31 m^2 y tiene 6 m^2 más que la primera. Si la forma de la primera recámara es cuadrada, ¿cuánto mide cada uno de sus lados?

a) Representen con la letra r la medida de cada lado de la primera recámara. Escriban la ecuación que representa el problema.

b) La ecuación se resuelve en dos etapas:

Primero completen el esquema de la Figura 1.1.

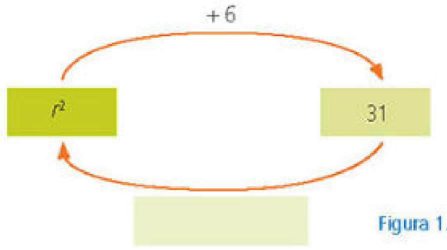


Figura 1.1

Es decir, $r^2 =$ ________
Sabemos que tanto 5 como –5 son números que elevados al cuadrado dan 25.

c) ¿Cuál de los dos números anteriores es la solución al problema de las recámaras de la casa de Juan? $r =$ ________ m. Expliquen por qué.

d) Comprueben la solución en su cuaderno utilizando la ecuación que obtuvieron en el inciso a.

2 Resuelvan las siguientes ecuaciones no lineales y comprueben las soluciones encontradas:

$$u^2 + 63 = 1\,744 \qquad 2w^3 - 3 = 429$$

Respondan lo siguiente:
¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es de 1 131 cm^3?

3 Realicen y respondan lo que se les pide:
¿Cuál es el valor de x en la ecuación?

$$4 = \frac{256}{x^3}$$

a. Pueden empezar por responder la pregunta: ¿entre qué número se divide 256 para obtener 4?
b. Una vez respondido lo anterior, pueden escribir la ecuación de la siguiente manera: ____________________

entonces: $x^3 =$ __________

$x =$ __________

c. Comprueben en su cuaderno la solución encontrada; sustituyan el valor de x en la ecuación original.
d. ¿Hay otros valores de x que satisfagan esta ecuación? Expliquen su respuesta. ____________________
Comenten en grupo su respuesta.

4 Hay otra manera de pasar de la ecuación $4 = \frac{256}{x^3}$ a una ecuación simple.
Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación original por x^3 tenemos:

$$x^3(4) = \left(\frac{256}{x^3}\right)x^3$$

Y después de simplificar se obtiene: $4x^3 = 256$
Esta ecuación ya la resolvieron en el punto anterior.

Comprendamos

Individual

1 En la Figura 1.2, el área de ambos cuadrados anaranjados más 12 cm² da 140 cm², que es el área del rectángulo azul. ¿Cuánto mide cada lado de los cuadrados anaranjados? ¿Cuánto mide de largo el rectángulo azul?

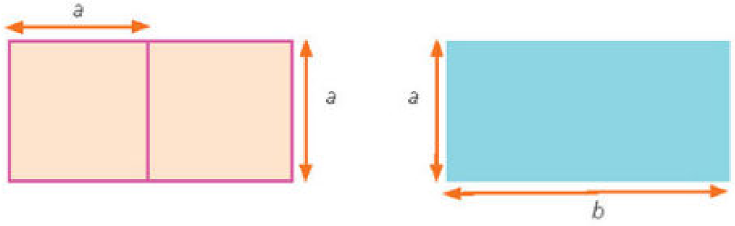


Figura 1.2

a. Anota en tu cuaderno la ecuación que representa la primera pregunta del problema.
b. Restamos ________ a ambos miembros de la ecuación, después los dividimos por ________ y tenemos: $a^2 = 64$
c. Los valores que a puede tomar son: __________ y __________.
d. Cada lado de los cuadrados rosas mide: ____________________.
e. Plantea una ecuación para la segunda pregunta del problema.
____
f. De esta ecuación obtenemos que $b =$ __________.
g. Comprueba los valores obtenidos para ambas ecuaciones.

2 ¿Cuánto mide de lado cada cuadro amarillo de la Figura 1.3, si el área del cuadrado grande es de 225 cm²?

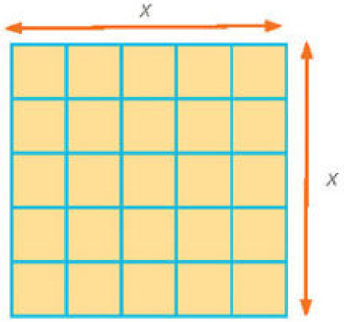


Figura 1.3

a. El área del cuadrado grande puede escribirse como la ecuación:
$x^2 =$ __________
b. ¿Qué números elevados al cuadrado dan 225?
____
c. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? ______________ cm.
d. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrito? ______________ cm.
e. Comprueba la respuesta en tu cuaderno.

Integremos

Individual

1 ¿Cuánto mide la arista de cada cubito lila de la Figura 1.4, si el volumen del cubo grande es de 3 375 cm³? Utiliza la calculadora para resolver este problema.

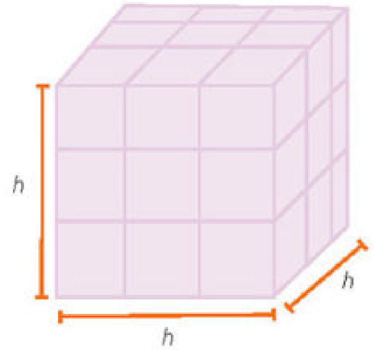


Figura 1.4

a. El volumen del cubo chico es: $h^3 =$ ____________________
b. ¿Qué número elevado al cubo resulta en 3 375? ____________
c. ¿Hay más de un número que elevado al cubo dé 3 375? ________
Comenten en grupo su respuesta.
d. ¿Cuánto mide la arista de cada cubito? ____________ cm.
Comprueba tu respuesta en tu cuaderno. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2 Resuelve algunas ecuaciones:

$g^2 - 12 = 213$

a La suma es la operación inversa de la __________, entonces:

$g^2 - 12 = 213$
$g^2 - 12 + 12 = 213 + 12$
$g^2 =$ __________

b En seguida se debe encontrar los números que elevados al cuadrado dan ______; es decir:

$g =$ ____________ y ____________

c Obtenidos los valores de g se desarrolla la comprobación.
Para $g = 15$:

$g^2 - 12 = 213$
$(15)^2 - 12 = 213$
$225 - 12 = 213$
$213 = 213$

Completa la comprobación con $g = -15$

$g^2 - 12 = 213$
$(\quad)^2 - 12 = 213$
_____ $- 12 = 213$
_____ $= 213$

3 Resuelve la ecuación siguiente:

$d^3 + 8 = 224$

a Como la ________ es la operación inversa de la suma, entonces:

$d^3 + 8 = 224$
$d^3 + 8$ ______ $= 224$ ______
$d^3 =$ _________

b ¿Qué números elevados al cubo dan ___________?
Entonces, $d =$ ___________

c Comprueba en tu cuaderno la ecuación; sustituye los valores obtenidos de d.

3 Escribe en tu cuaderno un problema que represente cada una de las ecuaciones siguientes; resuélvelas utilizando operaciones inversas y comprueba los valores obtenidos.

$a^2 + 6 = 70$

$p^3 - 5 = 22$

4 Resuelve el problema siguiente aplicando operaciones inversas.
El doble del cuadrado de un número más 12 nos da 174, ¿cuál es ese número?

a Escribe en tu cuaderno y resuelve la ecuación que representa el problema.

b ¿Cuántos números encontraste que satisfagan la ecuación anterior?

____

c Comprueba tus resultados; sustituye los números encontrados en la ecuación del inciso *a*.

Apliquemos

Pareja

1 En pareja, resuelvan en su cuaderno lo siguiente:

a Rocío va a construir un cilindro cuya capacidad será de 282.6 cm^3 y la altura de 10 cm, ¿cuánto debe medir de diámetro?

b $x^3 + 6 = 14$ $\quad 4a^2 - 12 = 244$ $\quad \frac{f^2}{6} + 50 = 74$

c Inventen un problema que se resuelva con las siguientes ecuaciones y comprueben los valores obtenidos.

$$c^3 - 9 = 55 \qquad 5e^2 = 605 \qquad \frac{6h^2}{10} = 1\,215$$

2 En pareja, resuelvan en su cuaderno lo que se les pide:

a $\frac{j^3}{12} = 18$

b $\frac{n^2 + 13}{11} = 12 - 5;$

c $\frac{524}{z^2 + 10} = 30 - 26$

3 Escriban en su cuaderno un problema que se resuelva con cada una de las siguientes ecuaciones; resuélvanlas y comprueben los valores obtenidos.

a $s^2 + 12 = 112$
d $-125 - 2m^3 = -179$
c $3p^2 + 123 = 129$

Lección 2

Construcción de figuras congruentes o semejantes

En esta lección aprenderás a construir figuras semejantes y a comparar las medidas de los ángulos y de los lados.

Conocimientos previos

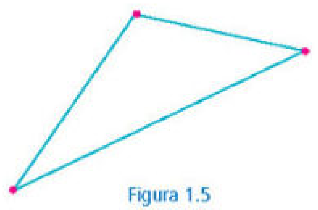


Figura 1.5

En el cuadro vacío de la derecha de la Figura 1.5, utilizando el juego de geometría, construye un triángulo que tenga la *misma forma y tamaño* que el mostrado en el cuadro de la izquierda. Describe el procedimiento que seguiste para elaborar tu construcción.

____

____

Situación problemática

Individual

Un triángulo tiene seis elementos a considerar: las longitudes de sus tres lados y la medida de sus tres ángulos. Ahora, para garantizar que dos triángulos tengan la misma forma y tamaño, ¿cuántos y cuáles de esos seis elementos son necesarios?

¿Cómo eliminar algunos casos? Por ejemplo, si uno de tus compañeros te dice que para que dos triángulos tengan la misma forma y tamaño basta con que tengan un lado igual, ¿qué le responderías? ¿Sería suficiente con mostrar un caso en que no ocurre lo afirmado por tu compañero? Describe tu respuesta y discútela con tus compañeros.

____

____

____

Analiza con uno de tus compañeros qué otros casos podrían eliminarse y escríbelos a continuación.

____

____

Comprendamos

Individual

Utilizando la circunferencia de la Figura 1.6 se construyen dos triángulos, como aparecen en ella.

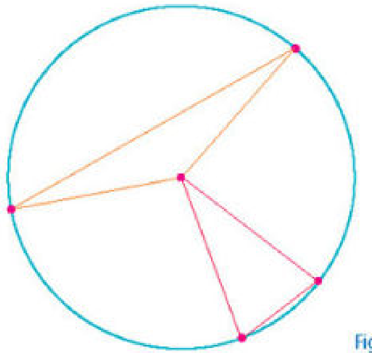


Figura 1.6

¿Tienen la misma forma y tamaño ambos triángulos? ___________. ¿Qué tienen en común? ___________________________. ¿En qué se diferencian? ___________________________.

Por lo tanto, si alguien afirmara que "dos triángulos que tengan en común las longitudes de dos de sus lados tienen la misma forma y tamaño", la figura anterior mostraría un caso en que la afirmación es ______________. Un ejemplo de lo anterior se llama ________________________________.

Integremos

Individual

1 Con tu juego de geometría, construye dos triángulos que tengan sólo un ángulo de 30 grados cada uno de ellos.

¿Los triángulos que construiste tienen la misma forma y tamaño?

____

2 En el espacio que sigue dibuja dos triángulos que tengan dos ángulos iguales de 35 y 50 grados cada uno.

¿Los triángulos construidos tienen la misma forma y tamaño? __________.
¿Tu respuesta coincide con la de tus compañeros? ______, ¿en qué?____
____

3 Con tu juego de geometría traza en tu cuaderno dos triángulos cuyas longitudes de sus lados sean 4 cm, 5 cm y 6 cm. ¿Los triángulos tienen la misma forma y tamaño? ________________. Coméntalo con tus compañeros.

4 Con uno de tus compañeros construyan en sus cuadernos dos triángulos, uno cada quien; deben tener un lado de 4 cm y los ángulos formados en los extremos del lado igual han de ser de 20 y 90 grados respecto a este lado y estar hacia un mismo lado del mencionado de 4 cm. ¿Los triángulos construidos tienen la misma forma y tamaño? __________. Describan lo realizado a sus compañeros de grupo. ¿Coincide el grupo con la respuesta dada por ustedes? __________.

5 Propón la construcción en sus cuadernos de dos triángulos que cumplan con características diferentes a las presentadas. Describe los casos distintos que se presentaron en tu grupo y contesta si en cada caso los dos triángulos tienen la misma forma y tamaño.
____
____
____

6 Imagina que los triángulos son piezas de madera, ¿cómo verificarías que dos triángulos tienen la misma forma y tamaño?
____
____
____

Coméntalo con tus compañeros y describe si llegaron a un acuerdo.
____
____

7 Los triángulos que tienen la misma forma y tamaño se denominan triángulos congruentes. De los casos que has construido durante las actividades anteriores, ¿en cuáles obtuviste triángulos congruentes?
____
____
____

Glosario

Triángulos congruentes. Se dice que un triángulo es congruente con otros si sus lados respectivos y sus ángulos son iguales.

Apliquemos

Individual

1 En el rectángulo de la Figura 1.7 traza con tu regla una diagonal de un vértice al vértice contrapuesto.

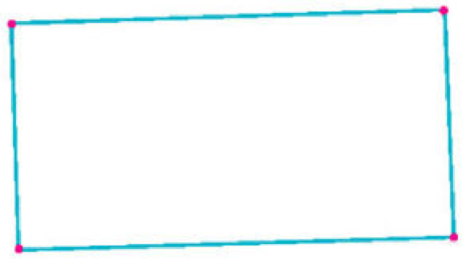


Figura 1.7

La diagonal trazada divide el rectángulo en dos triángulos, ¿son congruentes ambos triángulos? _________. Explica tu respuesta.
____
____

2 Al trazar las diagonales de un rombo, éstas lo dividen en cuatro triángulos. Escoge dos de los cuatro triángulos. ¿Los que elegiste son congruentes? _______. Argumenta tu respuesta. ____________________
____
____

3 En la Figura 1.8 aparece un paralelogramo en el que los puntos medios de cada uno de sus lados determinan un cuadrilátero. El paralelogramo queda dividido en cuatro triángulos y el cuadrilátero.

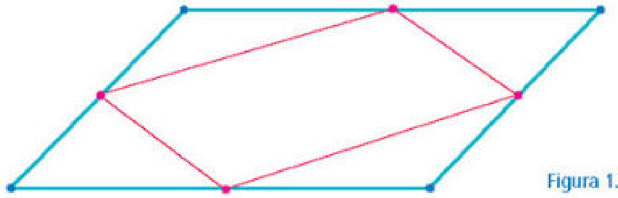


Figura 1.8

¿Cuáles de esos triángulos son congruentes?
____

Coméntalo con tus compañeros y escribe el acuerdo al que llegaron.
____
____
____
____

Situación problemática

Individual

Veamos ahora el caso de triángulos que tienen la *misma forma pero diferente tamaño*. El lado mayor del triángulo de la Figura 1.9 mide 5 cm.

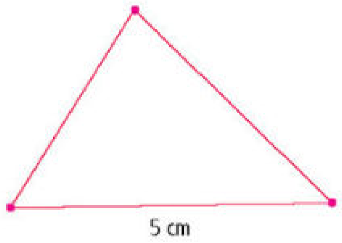


Figura 1.9

Con tu juego de geometría, construye otro triángulo que tenga la misma forma del mostrado, pero cuyo lado mayor mida 7 cm. Describe cómo lo harías y coméntalo con tus compañeros.

____

____

Comprendamos

Individual

1. Si te dan un triángulo equilátero, ¿cuántos grados mide cualquiera de sus ángulos interiores? _______ grados. Si te piden construir otro triángulo que tenga la misma forma que el anterior pero cuyo lado sea diferente al que te dieron, ¿qué tipo de triángulo construirías?____________. Coméntalo con tus compañeros.

2. El triángulo que te dan es el que aparece en la Figura 1.10.

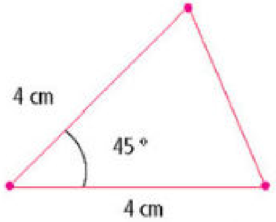


Figura 1.10

Si te piden construir otro triángulo que tenga la misma forma que el del dibujo anterior pero cuyos lados iguales midan 6 cm, ¿cómo lo harías? Descríbelo.

____

____

____

2. Construye un triángulo con uno de tus compañeros. Les piden dibujar otro triángulo que tenga la misma forma que el construido pero cuyos lados midan el doble de cada uno de los lados del triángulo anterior. ¿Cómo lo harían? Descríbanlo y coméntelo con sus compañeros.

____

____

Dos triángulos de diferente tamaño pero igual forma son semejantes.

Glosario

Triángulos semejantes. Son triángulos que tiene la misma forma, pero no el mismo tamaño; es decir, sus ángulos son congruentes y sus lados proporcionales en medida.

Integremos

Individual

1. ¿Qué elementos del triángulo determinan su forma y cuáles determinan su tamaño? ____

____

2. En la Figura 1.11 se presentan dos rectángulos:

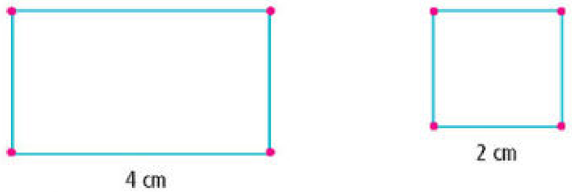


Figura 1.11

¿Tienen la misma forma y diferente tamaño? __________. Discute tu respuesta con tus compañeros y traten de llegar a un acuerdo; si lo consiguen, escríbelo a continuación.

____

____

____

3. En la figura anterior traza una diagonal en cada uno de los rectángulos. Al hacerlo, ambos rectángulos quedan constituidos por dos triángulos. Los dos triángulos, uno de cada uno de los rectángulos, ¿tienen la misma forma y tamaño diferente? Discútelo con tus compañeros y escribe su conclusión.

____

____

____

Compara lo anterior con el acuerdo de la pregunta previa, ¿hay acuerdo entre ambas? ___________. Coméntalo a tu profesor.

4. Si dos cuadriláteros tienen la misma forma y distinto tamaño, entonces al trazar una diagonal en cada uno de ellos se obtienen triángulos, ¿qué características cumplen?

____

____

____

Apliquemos

Individual

1. Dibuja dos cuadrados de distinto tamaño y traza una diagonal en cada uno de ellos. ¿Cómo son entre sí los triángulos de cada cuadrado?

____

____

____

Compara tu respuesta con las de otros de tus compañeros, lleguen a un acuerdo y escríbelo a continuación.

____

____

2 Ahora considera los dos rectángulos de la Figura 1.12.

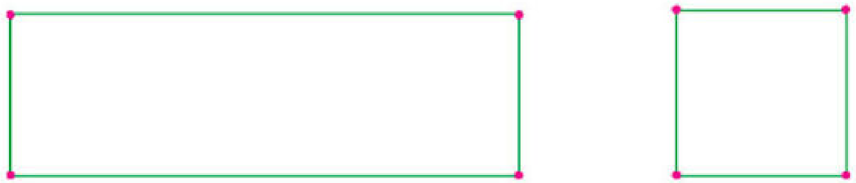


Figura 1.12

¿Tienen la misma forma y distinto tamaño? _______. Si tu respuesta fue afirmativa, entonces un cuadrado y un rectángulo (largo ≠ ancho) también tienen la misma forma y distinto tamaño, pero no sucedería lo que contestaste en la pregunta del inciso 1.

3 De acuerdo con tus respuestas a los dos incisos anteriores, ¿qué puedes concluir respecto a dos rectángulos que tienen la misma forma y distinto tamaño? Descríbelo.

____

____

____

Discute tu respuesta con tus compañeros de grupo y lleguen a un acuerdo, escríbelo enseguida.

____

____

____

4 Dos triángulos de misma forma y distinto tamaño están relacionados, mientras que dos rectángulos misma forma y distinto tamaño también están relacionados a través de los triángulos que se forman al trazar una diagonal en cada uno de los rectángulos. Con base en los ejemplos de esta lección, ¿cuál es la relación entre forma y tamaño para dos triángulos?

____

____

____

Lección 3

Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

En esta lección aprenderás a determinar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos y a aplicarlos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos; asimismo, aplicarás la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.

Conocimientos previos

Si conocemos dos de los ángulos de un triángulo, ¿podemos saber lo que mide el tercer ángulo? ________. Argumenta tu respuesta.

____

____

Se conocen dos de los ángulos del triángulo que se muestra en la Figura 1.13.

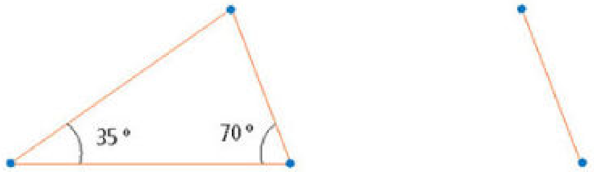


Figura 1.13

Utilizando el segmento que aparece a la derecha como uno de sus lados, construye un nuevo triángulo que también tenga un ángulo de 35 grados y otro de 70 grados. El nuevo triángulo y el que aparece a la izquierda ¿tienen la misma forma? ________. Describe el proceso que utilizaste para construirlo.

____

____

Situación problemática

Vamos a precisar la frase *misma forma y tamaño* indicando qué elementos de dos triángulos deben tener las mismas medidas para garantizar la igualdad de los ángulos y las medidas de los lados restantes en ambos triángulos. El listado de dichos elementos se conoce como criterios de congruencia para triángulos. Con base en tu trabajo de la lección anterior, ¿podrías decir cuál es un criterio de congruencia? ______________________

El que dos triángulos tengan dos ángulos respectivamente iguales (como sucedió en el apartado anterior) basta para garantizar la igualdad de los lados y ángulos

Glosario

Criterios de congruencia. Los criterios de congruencia son las condiciones mínimas que presentan dos o más triángulos para ser considerados congruentes, y son congruencia de sus lados y congruencia de sus ángulos.

restantes de ambos triángulos, es decir, la igualdad de dos ángulos respectivamente en dos triángulos. ¿Sería éste un criterio de congruencia? ________.

Compara tu respuesta con la de otros de tus compañeros.

Comprendamos

Individual

1 Construye en tu cuaderno dos triángulos que tengan lados de 4 cm y 6 cm; en este caso, ¿se garantizaría la igualdad de los ángulos y el lado restante de ambos triángulos? ______. Discútelo con otros de tus compañeros y escribe lo acordado con ellos.

____

____

¿Qué elemento agregarías a los dos lados iguales en cada triángulo para que resultara un criterio de congruencia? ______________________. Discútelo con tus compañeros.

2 Con tu juego de geometría construye en tu cuaderno dos triángulos que tengan un lado igual, por ejemplo de 5 cm, y en sus extremos ángulos de 25 y 40 grados, hacia un mismo lado del lado igual. ¿Los dos triángulos construidos tienen los dos lados restantes respectivamente iguales? _________. Compara tu respuesta con otro de tus compañeros y, si hubo coincidencia, escribe cuánto miden los lados restantes.

____

____

3 En el cuadro de la derecha de la Figura 1.14, construye un triángulo que cumpla con los datos del triángulo de la izquierda.

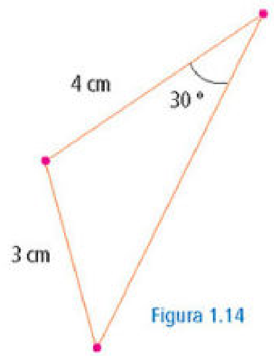


Figura 1.14

¿Cuántos triángulos distintos, con los mismos datos del presentado en el cuadro izquierdo, podrían construirse? Antes de contestar, discute con tus compañeros y, si llegan a un acuerdo, escríbelo a continuación.

____

____

4 Ahora, ¿cuántos criterios de congruencia para dos triángulos dados puedes mencionar a tus compañeros? __________. Indica los elementos iguales que consideras para ambos triángulos e ilustra la construcción en el pizarrón del salón de clase utilizando valores numéricos.

Integremos

Individual

1 Dibuja en tu cuaderno un triángulo isósceles, es decir, que tenga dos lados iguales (AC = AB); luego traza el segmento que une el vértice A con el punto medio del lado desigual BC y etiquétalo con M. El triángulo isósceles ABC queda dividido en dos nuevos triángulos: uno es el triángulo AMB y el otro es el triángulo AMC. ¿Son congruentes estos dos últimos? ______. ¿Qué criterio de congruencia apoya tu respuesta? ___________. Enlista los elementos iguales del criterio de congruencia que mencionaste y explica por qué son iguales dichos elementos.

____

____

____

2 En el paralelogramo ABCD que aparece en la Figura 1.15:

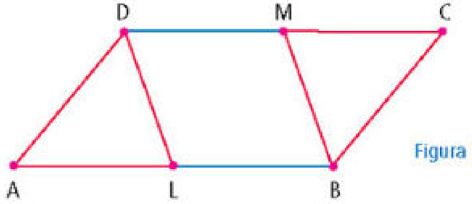


Figura 1.15

L y M son puntos medios de los lados AB y DC, respectivamente. ¿Los triángulos ALD y CMB son congruentes? _________. ¿Qué criterio de congruencia apoya tu respuesta? ________________. Enlista los elementos iguales que corresponden a dicho criterio de congruencia.

____

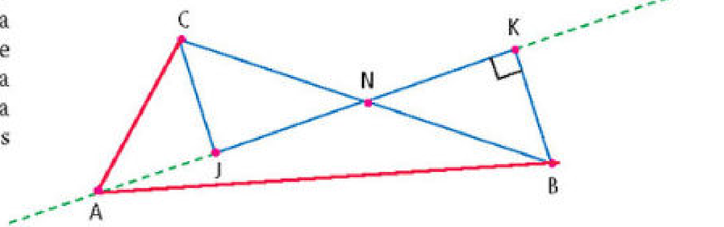
Explica por qué dichos elementos son iguales.

____

____

____

3 En el triángulo ABC, N es punto medio de BC; se trazó la semirrecta AN y desde los vértices B y C se proyectaron perpendiculares a la semirrecta, como se observa en la Figura 1.16. ¿Son congruentes los

Figura 1.16


triángulos CJN y BKN? ___________. ¿Qué criterio de congruencia apoya tu respuesta? ____.

Enlista los elementos iguales que considera dicho criterio en ambos triángulos. ____
____.

Explica por qué son iguales dichos elementos.
____
____
____

Apliquemos

Individual

1 En el triángulo isósceles de la Figura 1.17, AB = AC.

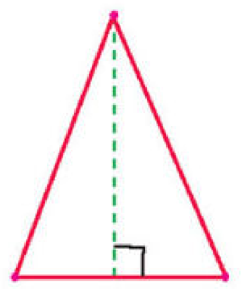


Figura 1.17

Desde el vértice A se traza la perpendicular al lado BC y el pie de dicha perpendicular se denomina H. El triángulo ABC queda dividido en los triángulos BHA y CHA, ¿son congruentes estos triángulos? _________. ¿Qué criterio de congruencia usarías?
____
____

¿Qué elementos iguales, en ambos triángulos, considera dicho criterio?
____
____

Explica por qué son iguales dichos elementos.
____
____

2 Cuando queremos averiguar si dos segmentos o dos ángulos son iguales, una estrategia consiste en considerar los segmentos (o ángulos) como lados (o ángulos) de triángulos, para luego remitirse a la congruencia de estos o a la congruencia de los mismos triángulos. Por ejemplo, en el trapecio isósceles de la Figura 1.18:

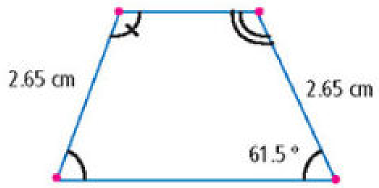


Figura 1.18

¿son iguales los ángulos en los vértices C y D? A fin de contestar, traza segmentos auxiliares para formar triángulos que contengan los ángulos C y D, respectivamente; luego intenta justificar si dichos triángulos son congruentes. Con uno de tus compañeros, tracen los segmentos auxiliares y realicen el proceso mencionado. Concluye si son iguales los ángulos mencionados. ____

3 La congruencia también se usa para elaborar mediciones indirectas. Por ejemplo, ¿cómo medir la distancia desde un lugar de la playa (F) a una roca en el mar?

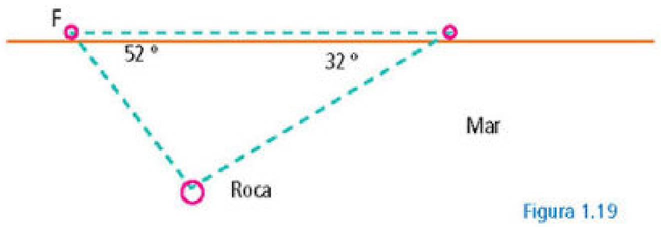


Figura 1.19

Completa la Figura 1.19 y a continuación explica cómo medirías la distancia entre el punto F y la roca que está en el mar.
____
____
____

Situación problemática

Individual

A partir de un triángulo, ¿cómo construir un nuevo triángulo de la misma forma pero de distinto tamaño? Por ejemplo, se tiene el triángulo de la Figura 1.20, en la siguiente página.

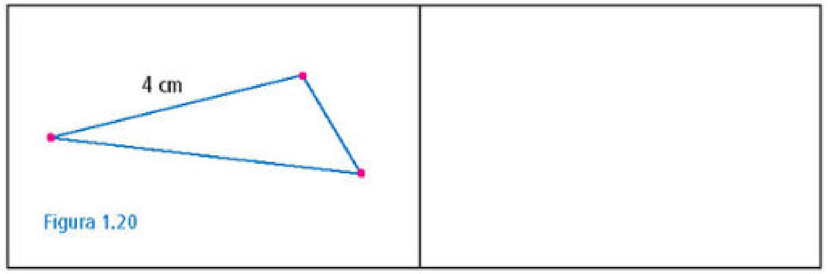


Figura 1.20

Se trata de construir un nuevo triángulo que tenga la misma forma del que aparece en el cuadro de la izquierda, pero que el lado de 4 cm ahora mida 3 cm. Trazaló en el cuadro de la derecha, comenta con tus compañeros cómo lo hiciste y pídeles que te digan cómo lo hicieron ellos.

Comprendamos

Individual

1 Construye un triángulo y localiza los puntos medios de cada uno de sus lados; con los puntos medios hallados dibuja un nuevo triángulo. ¿Este nuevo triángulo tiene la misma forma que el que inicialmente construiste? ________. Compara tu respuesta con la de otros compañeros. ¿Cómo son los lados del nuevo triángulo respecto a los lados del primero? ____.

Explica qué significa para ti que dos triángulos tienen la misma forma. ____

2 En un día soleado, Juan y Pedro están parados y cada uno proyecta una sombra sobre el piso. La estatura de Juan es 1.60 m y la de Pedro es 1.70 m; si la sombra de Juan mide 30 cm, ¿cuánto medirá la de Pedro? __________. Compara tu respuesta con la de otros compañeros. Describe cómo la obtuviste.____

____

Integremos

Individual

1 Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 cm, respectivamente. Si se multiplica cada uno de los lados mencionados por 2.5 se obtienen los números ____, ____ y ____ en centímetros. Construye el triángulo cuyas medidas se mencionaron y luego el triángulo con las medidas que calculaste. ¿Ambos tienen la misma forma? ______________. Compara tus respuestas con las de otro de tus compañeros.

2 A los triángulos que tienen la misma forma y distinto tamaño se les llama triángulos ________________. Traza dos triángulos equiláteros de distinto tamaño, ¿tienen la misma forma? __________. Mide las longitudes de sus lados. ¿Por cuál número debes multiplicar las longitudes de uno de ellos para obtener las longitudes del otro?; explícalo a continuación.

____

____

____

____

3 En el triángulo de la Figura 1.21 se trazó una paralela (línea punteada) a uno de sus lados.

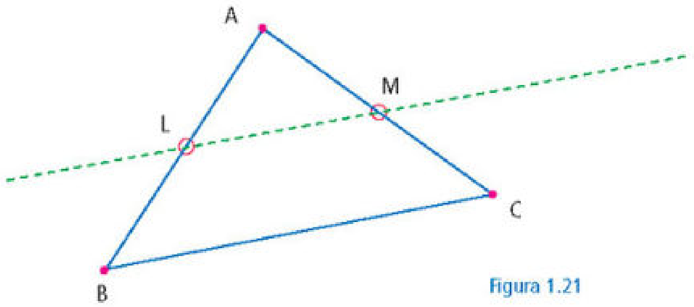


Figura 1.21

Los triángulos ABC y ALM son ______________. Escribe las longitudes de AL, LM y MA, y después las de AB, BC y CA. ¿Qué relación tienen estas dos ternas de números? __________________. Discútelo con tus compañeros.

Apliquemos

Pareja

1 Construyan en su cuaderno un triángulo rectángulo y desde el vértice del ángulo recto tracen una perpendicular al lado opuesto. ¿Son semejantes los dos triángulos determinados por dicha perpendicular?_______. Discútanlo con sus compañeros y den como respuesta el acuerdo al que llegaron.

2 Para medir la altura de un poste en un día soleado pide a tu compañeros que midan tu sombra cuando estás parado y también la sombra del poste. Debes conocer tu estatura para calcular la altura del poste con todos los datos mencionados. Describe cómo lo hiciste.

____

____

____

____

____

____

Lección 4

Representaciones de una misma situación

En esta lección aprenderás a analizar los vínculos que existen entre varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que correspondan a la misma situación, e identificar las que son de proporcionalidad directa.

Conocimientos previos

En sus vacaciones, Mariana y Ricardo visitaron Guerrero Negro, Baja California Sur, la salina costera más grande del mundo. Entre las cosas que les dijeron en la visita guiada, a Mariana se le quedó grabada la siguiente información: "Por primera vez, el 27 de mayo de 1957, se mandaron a Estados Unidos, en el barco *Nikolos*, 8 795.5 toneladas métricas de sal". Mariana pregunta a Ricardo: ¿cuántos litros de agua de mar se necesitarán para obtener esa cantidad de sal?

Para responder a la pregunta de Mariana, Ricardo buscó información en internet y encontró lo siguiente:

"La sal marina se produce en las salinas costeras por medio de evaporación solar. La concentración media anual del agua de mar está dada por la relación: 35 gramos de sal por cada litro de agua."

1 Lean las siguientes preguntas y piensen cómo podrían responderlas.

a ¿Cuántos gramos de sal se producirán con 175 litros de agua de mar?
b ¿Cuántos gramos de sal se obtendrán con 2 500 litros de agua de mar?
c ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para producir 1 kilogramo de sal marina?
d ¿Cuántos litros de agua de mar se requerirán para producir una tonelada métrica de sal?

Les proponemos que vayan a la sala de medios para usar una hoja de cálculo y responder las preguntas.

2 La hoja de cálculo puede utilizarse como una calculadora de la producción de sal marina. Para emplearla así, hagan lo que se describe a continuación.

a Abran una hoja de cálculo en la computadora. En la celda A1 pongan título a la columna: "Litros de agua de mar", y en la celda B1 anoten el encabezado: "Gramos de sal marina". Escriban los datos que encontró Ricardo acerca de la relación entre gramos de sal y litros de agua en las celdas correspondientes. Debe quedar una tabla como la que se muestra en la Figura 1.22:

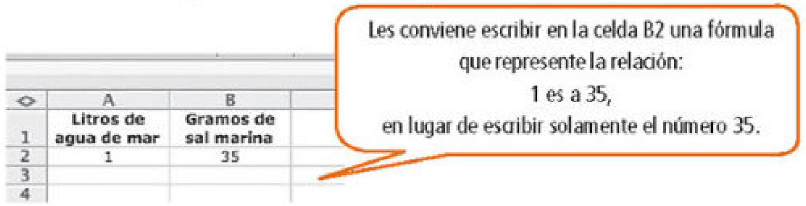


Figura 1.22

b Antes de introducir otros datos numéricos piensen cómo responder a la pregunta: ¿cuántos gramos de sal se obtienen con 2 litros de agua? Escriban la operación que harían para encontrar la respuesta.

____

____

¿Qué pondrían en las celdas A3 y B3 para que hacer que la computadora calcule lo que necesitan? En A3 anotarían ________ y en B3 ________. Verifiquen su hipótesis haciendo el cálculo para responder la pregunta anterior con la tabla que elaboraron.

c Usen la tabla que elaboraron con la hoja de cálculo como una calculadora y completen:

- Con 4 litros de agua se obtienen ______ gramos de sal marina.
- Diez litros de agua producen ______ gramos de sal marina.
- ______ gramos de sal marina se obtienen con 100 litros de agua.

Observa la Figura 1.23, Ricardo metió la fórmula que aparece en la celda B3 de la hoja de cálculo y con eso consiguió que la tabla funcionara como una calculadora. Para responder a preguntas del tipo ¿cuántos gramos de sal se obtienen con 175 litros de agua?,

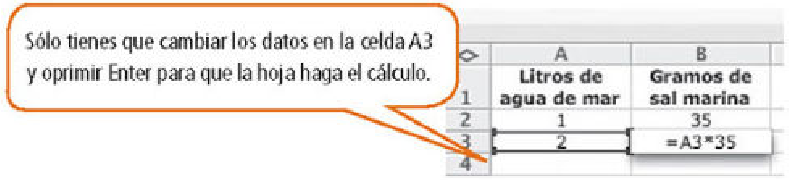


Figura 1.23

Discutan entre todos cuáles fueron las diferencias y similitudes entre lo que cada pareja hizo en la hoja de cálculo y lo que hizo Ricardo.

Usen la tabla que elaboraron en la hoja de cálculo para responder las preguntas de los incisos *a* y *b* del principio de la lección.

d Ricardo recurrió a su calculadora para encontrar una respuesta a la pregunta del inciso *c*. Le dice a Mariana: "para obtener 1 kilogramo

de sal se necesitan entre 28 y 29 litros de agua de mar". ¿Están de acuerdo con Ricardo? _____, ¿por qué? ____________________.
¿Cómo encontraría Ricardo esa aproximación?

____

Verifiquen su hipótesis.

e Ricardo dijo que con dos cubetas de agua de mar se podría obtener 1 kilogramo de sal y Mariana pensó que se necesitarían 1 1/2 garrafones de los que se usan para almacenar agua purificada. ¿Quién tiene razón? ___________ ¿Por qué? ____________________.

f Entre los dos busquen una mejor aproximación que la encontrada por Ricardo con su calculadora; aproxímense utilizando primero una cifra decimal y después tres cifras decimales.

g Según recomendaciones de la Organización Mundial de la Salud, la cantidad máxima diaria de sal que un ser humano puede consumir es 4 gramos. ¿Cuántos litros de agua de mar se necesitan para producir esa cantidad de sal? _______. Y ¿para producir la cantidad de sal que consumes en un año, ¿cuántos litros de agua de mar se requieren? ____.

Para hacer su cálculo Ricardo empleó la relación:
cantidad de gramos de sal = cantidad de litros de agua de mar × 35; eso fue lo que escribió en la celda B3.

Comprendamos

En la Tabla 1.1, que Ricardo hizo, cada vez que se introduce un dato en la celda A3 aparecen cuatro cantidades, las dos que determinan la relación 1 es a 3 y las correspondientes a la relación que quiere encontrar; por ejemplo, ¿cuántos gramos de sal producen 2 litros de agua de mar? Fíjate en el esquema siguiente:

Tabla 1.1

Litros	Gramos
1	35
2	70

Con esos datos se pueden formar las razones 1 es a 2 y 35 es a 70, y la proporción: $\frac{1}{2} = \frac{35}{70}$.

También se pueden formar las razones 1 es a 35 y 2 es a 70, y la proporción: $\frac{1}{35} = \frac{2}{70}$.

En la primera proporción se relacionan litros con litros y gramos con gramos; es decir, **se comparan magnitudes de la misma especie**, que se llaman razones internas.

Glosario

Razones internas: razones cuyos términos pertenecen a la misma magnitud.

1 Escoge distintas cantidades de litros, por ejemplo, números de una cifra, de dos cifras y de seis cifras, y calcula los gramos de sal que se producen con esas cantidades de agua de mar usando la calculadora de Ricardo o la que tú y tu compañero construyeron. Identifica las razones internas en cada caso y compáralas.

En el esquema anterior, en la segunda proporción puedes ver que se relacionan litros con gramos; es decir, **se comparan magnitudes de diferente especie**, las cuales se denominan razones externas.

Glosario

Razones externas: razones cuyos términos corresponden a distintas magnitudes.

2 Fíjate en la Tabla 1.2. Escribe en los recuadros las proporciones formadas con razones internas y las formadas con razones externas.

Litros	Gramos
1	35
7	245

a)

Litros	Gramos
1	35
25	875

b)

Litros	Gramos
1	35
23	805

c)

Litros	Gramos
1	35
175	6 125

d)

Tabla 1.2

En el siguiente recuadro escribe lo que observas sobre las razones externas.

En el caso de la salinidad, con una concentración media anual de 35 gramos de sal por cada litro de agua de mar, las proporciones formadas con razones externas son _____________ y tienen un valor de _______________.

Grupo

3 Entre todo el grupo y su profesor lleguen a un consenso para responder las preguntas siguientes:

¿La cantidad de litros de agua de mar se relaciona proporcionalmente con la cantidad de gramos de sal marina que se producen? _____.
¿Por qué? ____
¿La variable independiente es la cantidad de gramos de sal? _________.
¿Por qué? ____.
¿La constante de proporcionalidad es 35? ______. ¿Por qué?_________
____.
¿La expresión algebraica $y = 35x$, donde y es la cantidad de gramos de sal y x la cantidad de litros de agua, representa la relación proporcional entre estas dos cantidades? _____. ¿Por qué?_______________
____.

Integremos

Individual

La hoja de cálculo se puede emplear también para organizar datos en tablas y buscar relaciones entre ellos.

	A	B
1	Litros de agua de mar	Kilogramos de sal marina
2	1	0.035
3	100	3.500
4	200	7.000
5	400	14.000
6	500	17.500
7	1000	35.000
8	10000	350.000
9	20000	700.000
10	30000	1050.000
11		
12		

Tabla 1.3

1. Mariana construyó una tabla distinta a la de Ricardo; su intención fue encontrar cuántos litros de agua de mar se necesitaran para producir una tonelada métrica de sal. Para hacerlo, convirtió los gramos en kilogramos; su tabla es la 1.3, aparece a la izquierda.
   Escribe la relación entre litros de agua y kilogramos de sal marina que Mariana usó para construir la tabla: ______________________________

   ____

2. Como puedes ver en la tabla, después de calcular la sal producida por 1 000 litros de agua, Mariana decidió calcular la cantidad de sal producida con 10 000 litros de agua. Explica por qué tomó esa decisión.

   ____

   Con los datos que tiene Mariana en su tabla, ¿encontró la respuesta que buscaba? _____. ¿Por qué? ______________________________.

3. Encuentren una aproximación exacta para la cantidad de litros de agua de mar que se necesitan para producir una tonelada métrica de sal y con ese dato contesten la pregunta que Mariana le hizo a Ricardo, la que aparece al inicio de la lección. Para responder, pueden usar la hoja de cálculo como una calculadora particular o hacer una tabla y arrastrar la fórmula que relaciona las dos cantidades en la columna B.

   Con una hoja de cálculo pueden representarse los datos de la tabla de Mariana por medio de una gráfica. Para recordar cómo se hace, sigue las instrucciones y obtendrás una representación de los datos como la que aparece en la Gráfica 1.1:

   a. Haz la tabla de Mariana en la hoja de cálculo.
   b. Selecciona con el cursor los datos que quieres que aparezcan en la gráfica.
   c. Haz clic en Gráficos.
   d. Elige la representación de los datos dada por X Y (Dispersión) y selecciona la dispersión con líneas rectas.
   e. Selecciona la gráfica haciendo clic en la orilla y pon títulos tanto a la gráfica como a los ejes.

Gráfica 1.1

La hoja de cálculo produjo una línea recta con los datos que Mariana introdujo en la tabla. ¿Por qué hizo eso la hoja de cálculo?

____

En esa imagen también puedes ver que la recta pasa por el origen. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto? _______. ¿Qué significa que la representación de los datos pase por ese punto? ______________________________

____

Explora la gráfica arrastrando el cursor sobre la recta; te darás cuenta que aparecen las coordenadas de algunos puntos ¿Puedes encontrar la de cualquier punto que esté sobre la recta? _____.

Junto con su maestro, comparen las respuestas que encontraron por parejas.

Apliquemos

Ricardo quiere encontrar una mejor solución a la pregunta: ¿cuántos litros de agua se necesitan para producir 1 kilogramo de sal marina? Para hacerlo recurre al programa Graphmatica; quizá recuerdes que el año pasado lo empleaste. Si no está en la computadora de la sala de medios, pide al maestro que lo instale. Puede bajarlo de la dirección www.graphmatica.com/espanol.

Pareja

Para recordar cómo usar el programa sigan el razonamiento de Ricardo.Abran el programa. En la pantalla verán una imagen del plano cartesiano con una cuadrícula y los ejes X y Y divididos en partes iguales. La mayoría de las veces esa forma de la pantalla no se ajusta a los requerimientos del problema.

1. Ricardo abre el programa y ve la imagen del plano cartesiano con la cuadrícula que aparece en la pantalla; como en otras ocasiones, sabe que la tiene que cambiar:

   a. Hace clic en el botón Ver, al desplegarse el menú selecciona Rango de cuadrícula y se abre un cuadro de diálogo. Ricardo escribe en Izquierda: –1 y en Abajo: –1. Expliquen por qué tomó esas decisiones.

   ____

   ____

   Como en el caso de la gráfica de la hoja de cálculo, en el eje X se representarán las cantidades de litros de agua, es decir, los valores de la variable independiente. ¿Qué debe poner Ricardo en el cuadro Derecha? _________. ¿Qué se va a representar en el eje Y? _______ ______________________. Ricardo escribió en el cuadro Arriba, 1 100, ¿por qué tomó esa decisión?____________________

   ____

   Ajusten la cuadrícula con los datos que consideren que les servirán para representar los litros necesarios para producir hasta 1 100 gramos de sal.

2. Ricardo sabe que las magnitudes litros de agua de mar y gramos de sal son proporcionales, por ello la relación entre esas magnitudes se representa por medio de una recta que pasa por el origen; es decir, el punto (0, 0) está sobre la recta. También sabe que el punto (1, 35) está sobre la recta; ¿saben ustedes por qué es cierto esto? ____. Explíquenlo.

   ____

En la tabla 1.3, Ricardo escribe las coordenadas de estos dos puntos; al oprimir la tecla Enter, un símbolo indica la localización en el plano de esos puntos. Hagan lo mismo que Ricardo.

3 Como Ricardo sabe que dos puntos determinan una recta, en los botones de la derecha oprime Ajustar curva. En la pantalla aparece la recta que une los dos puntos. Fíjense en la cinta inferior de la pantalla; se observa una leyenda que empieza como:
$y = 35.0\,x$ 'ajuste de curva de Diagrama 1;...
¿Coincide esta información con la expresión algebraica que corresponde a la salinidad del mar encontrada antes? ______ ¿Por qué?

___

Muevan el cursor sobre la pantalla y observen la información que aparece en la cinta inferior. ¿Qué pasa si el cursor se desliza sobre la recta?

___

Con la calculadora de Ricardo, ustedes encontraron las cantidades de gramos de sal correspondientes a 2, 4 y 10 litros de agua. Localicen con el cursor los puntos sobre la recta que tengan esas abscisas e identifiquen la ordenada; ¿coinciden con los resultados que encontraron antes? ____________. Introduzcan esos datos en la tabla 1.3 y verifiquen que los puntos indicados estén sobre la recta.

Busquen los puntos cuyas abscisas son 28 y 29, encuentren sus ordenadas y localícenlos en la pantalla.

4 Cómo harían para encontrar la solución a la pregunta: ¿cuántos litros de agua de mar se necesitan para producir 1 kilogramo de sal? Usen el programa Graphmatica.

___

Verifiquen su hipótesis.

5 Ricardo escribió la ecuación $y = 1\,000$ en la cinta superior de la imagen del plano que aparece en la pantalla y oprimió Enter. ¿Qué hace el programa?

___

A continuación pone el cursor en Herramientas y al desplegarse el Menú, selecciona Encontrar intersección; se abre el cuadro de diálogo y elige como Ecuación 1: $y = 1\,000$ y como Ecuación 2: $y = 35.0x$. Oprime el botón Calcular y encuentra las coordenadas del punto. ¿Respondió Ricardo a la pregunta con esas acciones? _____ ¿Por qué? ______________

___

6 Usen el método de Ricardo para encontrar la cantidad de litros de agua que se requieren para producir 723 g de sal.

Observen la imagen de la pantalla que aparece en la Figura 1.24. Resuman lo que han hecho con el programa Graphmática, ¿obtuvieron algo parecido?

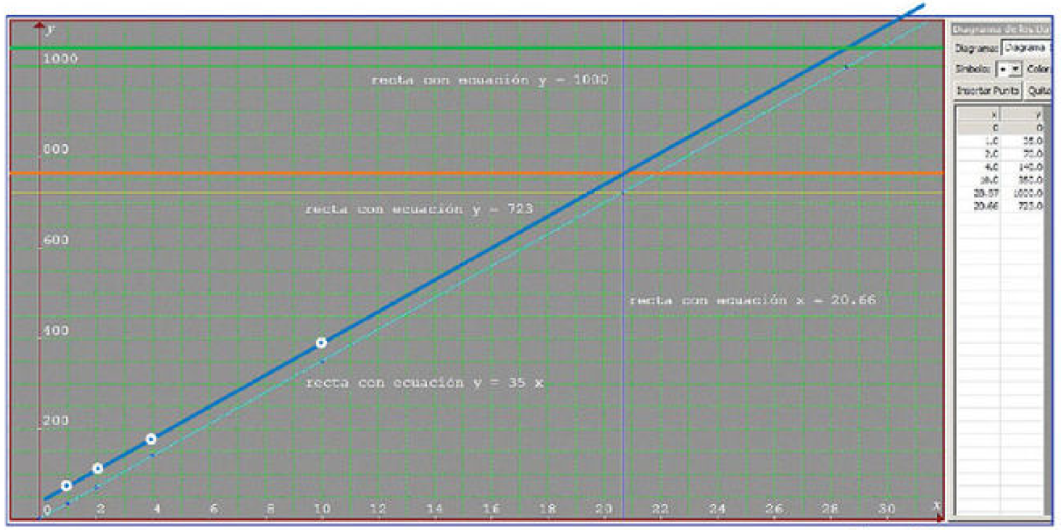


Figura 1.24

Utilicen lo que han aprendido para responder las siguientes preguntas: ¿cuántos litros de agua se requieren para producir una tonelada métrica de sal?, ¿cuántos litros de agua son necesarios para obtener 8 795.5 toneladas métricas de sal?

Situación problemática

Otras expresiones algebraicas, tablas y gráficas

Emilio encontró el siguiente anuncio sobre saltos en paracaídas:

Pareja

"Si quieres saltar sin tener que hacer curso alguno, te ofrecemos la forma de hacerlo. Ascenderás en el avión hasta una altura de 4 000 metros y probarás durante casi un minuto el placer que proporciona la caída libre. Cayendo a más de 190 km/h tu instructor abrirá el paracaídas a 1 500 metros y podrás aterrizar de manera segura".

Emilio quiere darse una idea de cómo será el descenso. ¿Cómo podría representar el movimiento de lanzarse desde un avión y caer libremente durante un tiempo? Intercambien ideas.

La caída libre es el movimiento de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un campo gravitacional. La caída libre ideal puede estudiarse despreciando la resistencia aerodinámica que el aire presenta al movimiento del cuerpo mediante el análisis de lo que pasaría en el vacío. Como resultado de sus experimentos sobre el movimiento uniformemente acelerado, Galileo Galilei (1564-1642) estableció la ley que describe la caída de los cuerpos. La expresión algebraica que expresa esa ley es:

$$h = v_i t + \frac{1}{2} g t^2$$

donde h es la altura o la distancia recorrida, v_i la velocidad inicial, t el tiempo en segundos y g la constante de aceleración de la gravedad. En la Tierra, esa constante es 9.81 m/s².

1 Como Emilio quiere estudiar la caída libre al lanzarse desde un avión hacia el suelo, la velocidad inicial es 0; por ello la expresión algebraica que relaciona la altura con el tiempo y con la que va a hacer cálculos es la siguiente:

$$h = \frac{9.81}{2} t^2$$

¿Cuál es la variable independiente? ___________. ¿Cuál es la variable dependiente? ___________________________. ¿La relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla es una relación de proporcionalidad? ______________________ ¿ Por qué? ________

____

Con el uso de una hoja de cálculo pueden estudiarse datos para describir cómo hará Emilio el descenso si decide aventarse en paracaídas.

2 Abran el programa. Titulen la columna A con la variable independiente y la columna B con la variable dependiente. Puesto que Emilio quiere ver en la tabla cómo va decreciendo la altura conforme pasa el tiempo, pone 4 000 en la celda B2. ¿Por qué toma esa decisión? _______________

____.

¿Qué debe escribir Emilio en la celda A2? ______________________
¿A qué altura estará el paracaidista pasado 1 segundo? ____________.
Pasados 2 segundos, ¿a qué altura estará? ______________________

Emilio escribió en la celda A3 la siguiente expresión: =A2+1. ¿Por qué lo hizo? ____

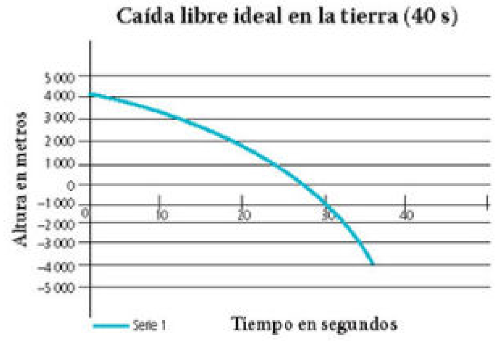
Hagan lo mismo que Emilio y arrastren la fórmula en esa columna A hasta la celda A42 para que verifiquen su respuesta. ¿Cuál es la expresión que debe escribir Emilio en la celda B3 para que la hoja de cálculo determine la distancia recorrida durante la caída en segundos?

____

Arrastren la fórmula en la columna B hasta la celda B42 y contesten las siguientes preguntas:
¿A qué altura se encuentra el paracaidista cuando el instructor abre el paracaídas? ____

¿Cuántos segundos han pasado desde que el paracaidista se lanzó del avión? ____

3 Emilio representó el movimiento de la caída libre del paracaidista con una gráfica de dispersión de los datos. Obtuvo la Gráfica 1.2 que aparece abajo. En ella pueden observar cómo va disminuyendo la altura a medida que el tiempo transcurre.



Gráfica 1.2

Fuente: http://www.educaplus.org/movi/4_2caidalibre.html

¿En cuántos segundos llegó al suelo el paracaidista? ______. El anuncio que Emilio encontró decía que él experimentaría una caída libre durante casi un minuto. ¿Está mal el anuncio o hay otra explicación para la diferencia entre lo que se modela con la expresión algebraica, la tabla y la gráfica, y lo que promete el anuncio?

Comparen sus respuestas con sus compañeros y lleguen a un consenso acerca de lo que dice el anuncio y lo que encontraron con la ley de la caída de los cuerpos.

La constante de la aceleración de la gravedad es diferente según el lugar en el espacio. La Tabla 1.4 que contiene información del valor en distintos cuerpos celestes.

Un paracaidista se lanza hacia la Luna a 4 000 m de altura. ¿Alunizará en más o menos tiempo de lo que aterrizará si se avienta hacia la Tierra desde la misma altura? O bien, ¿le tomará el mismo tiempo llegar a la Luna que llegar a la Tierra? ¿Qué pasará si se avienta hacia Júpiter?

En su cuaderno grafiquen el descenso a la Luna y a Júpiter con las mismas condiciones que la caída libre hacia la Tierra desde 4 000 m de altura. Comparen las tres gráficas y escriban entre todos lo que observaron.

Lugar	g ($\frac{m}{s^2}$)
Mercurio	2.8
Venus	8.9
Tierra	9.8
Marte	3.7
Júpiter	22.9
Saturno	9.1
Urano	7.8
Neptuno	11.0
Luna	1.6

Tabla 1.4

Lección 5

Variación cuadrática y gráficas

En esta lección aprenderás a reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y a representar la regla que modela esta relación mediante una tabla o una expresión.

Conocimientos previos

En un cuadrado, l representa la longitud de cualquier lado. Si representamos el perímetro de este cuadrado por p, entonces:

Calcula el valor de p correspondiente a cada valor de l en la Tabla 1.5:

l	$p =$
4 m	
2 m	
$\frac{5}{4}$ m	
1 m	

Tabla 1.5

Observa en la tabla anterior que conforme se dan valores diferentes a l, también se obtienen valores distintos del perímetro p.

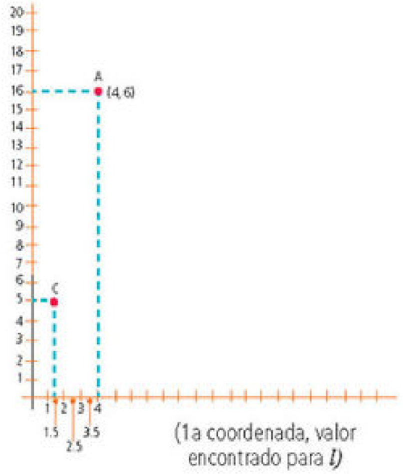
1 Con los renglones de la tabla anterior formaremos los puntos A, B, C y D de la siguiente manera:

Valor dado a l — Valor encontrado para p

A (4, 16) C (, 5)
B (2,) D (1,)

a Localiza en la Gráfica 1.3 los puntos que faltan:

(2a coordenada, valor encontrado para p)



Gráfica 1.3

b Sólo se han localizado cuatro puntos, pero podrías encontrar más si das a l otros valores distintos y calculas los valores correspondientes a p en cada caso. Por ejemplo, encuentra los valores de p en los siguientes casos:

Valor dado a l — Valor encontrado para p

P (3, 12)
Q (5,)
C (2.5,)
D (3.5,)

Situación problemática

Veamos un ejemplo de otro tipo.

A la orilla de un río se quiere instalar una cerca, como se muestra en la Figura 1.25, cuya longitud es de 120 m. Las longitudes de los lados de la cerca se han representado con las letras x y y asumiendo que se miden en metros.

Figura 1.25

a Escribe una expresión algebraica para representar la longitud de la cerca.

Longitud de la cerca = 120 m ______

Individual

b El valor que x puede tomar es un número mayor que_____, pero menor que ______.
El valor que y puede tomar es un número mayor que ____, pero menor que _____.

c Completa la Tabla 1.6:

x (m)	y (m)
10	
20	
30	
40	
50	
60	

Tabla 1.6

d Observa que la cerca y la orilla del río forman un rectángulo cuya área es _____m^2.

Si asignas a x un valor (de los permitidos), entonces el valor de y queda automáticamente determinado y, por lo tanto, su área también.

3 En la Tabla 1.7 se da a x distintos valores; encuentra el valor de y en cada renglón y calcula el área en cada caso.

x (m)	y (m)	Área del rectángulo = x × y (m^2)
5		
10	100	
15		
20	80	
25		
30		
35		
40		
45		
50		
55		
60		

Tabla 1.7

En tu cuaderno, con los datos de las columnas 1 y 3, localiza los puntos correspondientes en el plano, ordénalos, únelos y forma una curva.

Integremos

En la geometría encontramos numerosos ejemplos de funciones; por ejemplo, el área de un polígono regular es función de la medida de uno de sus lados y la longitud de un círculo es función de la medida de su radio.

Individual

1 En física también existen muchos problemas en los que es importante conocer cuál de las variables es función de la otra.
A finales del siglo XVI, Galileo Galilei realizó una serie de experimentos que le permitieron establecer la ley que describe la caída de los cuerpos en el vacío. Esta ley se aplica a la caída de los cuerpos en la atmósfera y a los casos en los que no nos interese conocer los efectos producidos por la fricción del aire. La fórmula que expresa esta ley es:

$$d = \frac{1}{2} = gt^2$$

donde d = distancia en metros (m); t = tiempo transcurrido (s); $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ constante de aceleración de la gravedad en la Tierra.
Si queremos conocer qué distancia (d) recorrió en un segundo (s) una piedra que se dejó caer de lo alto de un edificio, empleamos la ecuación anterior. Así tenemos que:

$$d = \frac{1}{2} = g\,(1)^2 = \frac{1}{2}(9.81)(1)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

En el tiempo (t) = 2s, la piedra ha recorrido una distancia:

$$d = \frac{1}{2}\,(2)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2 Con el procedimiento anterior, elabora dos tablas de datos en las que aparecen los tiempos de caída y las distancias recorridas por un cuerpo, como las que te mostramos a continuación.

Completa las Tablas 1.8 y 1.9 y compara tus resultados con los de tus compañeros.

d (s)	d (m)
2.25	
2.50	
2.75	
	44.145
3.50	
4.00	
4.50	
	122.625
5.50	

Tabla 1.8

t (s)	d (m)
0	0
0.25	
	1.2
0.75	
	4.9
1.25	
1.50	
1.75	
	19.2

Tabla 1.9

3 En tu cuaderno grafica en un plano cartesiano los datos de las tablas anteriores.

Comprendamos

Individual

Decimos que la variación de las variables x y y es cuadrática si la ecuación de variación es de segundo grado en las variables x y y. Así, las siguientes ecuaciones de variación expresan variaciones cuadráticas en x y y.

$x^2 - y^2 = 5$
$2y + 5y^2 - 2x = 9$
$xy + y^2 = 1$
$y^2 - x = 3xy$
$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, donde a, b, c, d, e y f son constantes.

Algunos ejemplos de leyes que se expresan con base en variaciones cuadráticas son los siguientes:

- El área A de un cuadrado de lado l se expresa por: $A = l^2$.
- El área A de una circunferencia de radio r está dada por: $A = \pi r^2$
- La energía cinética T de un cuerpo se relaciona con su velocidad v por la ecuación de variación $T = \frac{1}{2}mv^2$
- La energía potencial elástica U de un resorte está dada por la ecuación de variación $T = \frac{1}{2}kx^2$, donde k se llama constante elástica del resorte y x es la distancia que éste se ha estirado.
- La trayectoria de una bala de cañón (despreciando la fricción del aire) está dada por la ecuación de variación $y = ax - bx^2$, donde a y b son constantes, x es la distancia recorrida horizontalmente y y la altura.

1 En la sección Integremos estudiamos la variación de la distancia d con el tiempo t en la caída libre de un cuerpo y vimos que estaba dada por la ecuación de variación:

$$d = \frac{1}{2} = gt^2$$

Como puedes notar, esta variación es cuadrática, ¿recuerdas cómo era la gráfica?

Apliquemos

Individual

1 Grafica la relación $v = gt^2$. Utiliza esa gráfica para completar la Tabla 1.10:

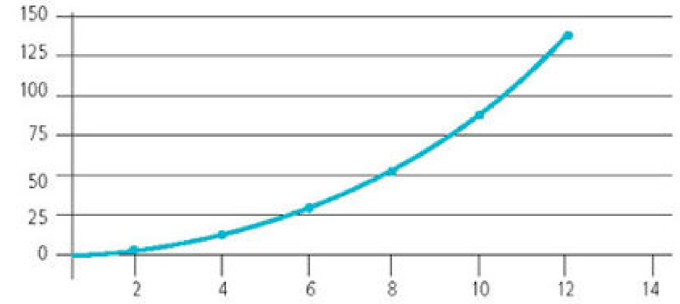
t (en s)	$3\frac{3}{4}$		8.25			
v (en cm/s)		$18\frac{3}{4}$		159.87	$270\frac{3}{4}$	312.12

Tabla 1.10

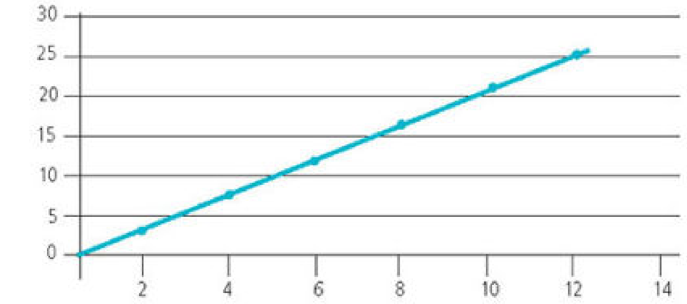
a ¿Los resultados que encontraste son aproximados? Explica por qué.

b Verifica tus resultados por medio de la relación.

2 Analiza las Gráficas 1.4 y 1.5:



Gráfica 1.4

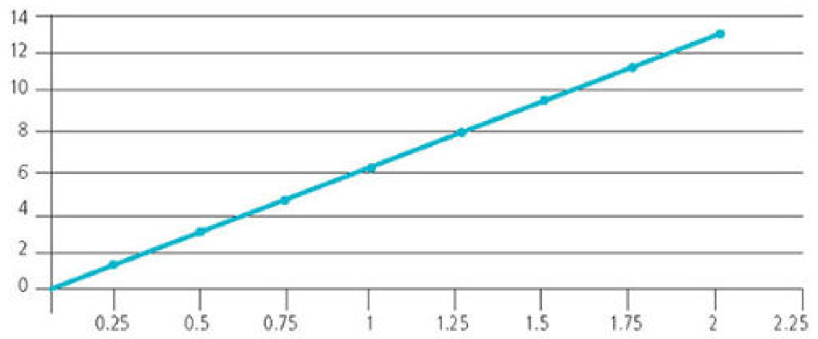


Gráfica 1.5

a Argumenta cuál de ellas representa la relación del área de un cuadrado y la medida de su lado.

____
____
____

3 Analiza la Gráfica 1.6:



Gráfica 1.6

a Escribe una situación que esté representada por esta gráfica.

____
____
____

b Escribe una expresión algebraica que represente la situación.

____

4 Resuelve el siguiente problema:

a Un terreno de forma rectangular tiene un perímetro de 64 m y un área de 240 m^2, ¿qué medidas tienen el largo y el ancho del terreno?

____
____
____

Lección 6

Probabilidad

En esta lección aprenderás a enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria. Utilizar la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y vincular diferentes formas de expresarla. Establecer cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta.

Glosario

Probabilidad: es una estimación numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.

Fenómeno aleatorio: es aquel en el que no se puede predecir, con exactitud, cuál será su resultado.

Conocimientos previos

Contesta las preguntas y completa las afirmaciones.

2 De los siguientes fenómenos, indica con ✓ a un lado de su inciso los que son aleatorios y con ✗ los que son deterministas:

a El número de personas en fila frente a la ventanilla de un banco durante un lunes de abril.

b La velocidad de un cuerpo de 1 kg de peso que cae de una altura de 10 m.

c El número de electrones del átomo de sodio.

d La altura, a las tres semanas, de cada brote de las 50 semillas plantadas en un invernadero.

e Los precios del petróleo de mezcla mexicana en 2013.

f El orden de las estaciones del año.

2 ¿Cuántos posibles resultados se esperan de un fenómeno determinista? ______. ¿Por qué? ______________________________.

3 Un fenómeno aleatorio es aquel en el que interviene el ____________. Por tanto, no podemos ____________ con seguridad el resultado de su elaboración.

4 De cada uno de los fenómenos que elegiste como aleatorios en 1, indica su inciso y todos sus posibles resultados.

____

____

5 Al conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio se le llama ______________. Un resultado de un fenómeno aleatorio se denomina ______________________________________.

6 Para un lanzamiento de un dado ordinario, indica:

a) Todos sus posibles resultados: ______________________

b) Todas las posibilidades que corresponden al evento de cada inciso:

i) No cae 5: ______________________
ii) A lo más se obtiene 4: ______________________
iii) Cae 4 o menos: ______________________
iv) Por lo menos cae 6: ______________________
v) Cae 6 o más: ______________________
vi) Caen 3 y 2: ______________________
vii) Es seguro que caiga: ______________________

Situación problemática

Pareja

En la rifa de un premio para reunir fondos para una causa particular se reparten o venden boletos numerados entre varias personas y se escoge *al azar* uno de ellos, el premiado. Supongamos que se venden 1 000 boletos y que cualquiera de ellos es tan posible que sea el premiado como cada uno de los restantes. Si participamos en la rifa, ¿cómo podemos estimar nuestras oportunidades de ganar el premio?

Con un compañero, discute y completa las siguientes afirmaciones.

1 Si compramos sólo un boleto, tenemos ___ posibilidad, entre ________ posibilidades, de ganar el premio. La **probabilidad** de que ganemos el premio es ______________________________________.

2 Supongamos que compramos cinco boletos:

a) Tenemos __ entre ____ posibilidades de ganar. O sea que la probabilidad de que ganemos es ______________________________.

b) Tenemos ___ entre ____ posibilidades de **no** ganar el premio; es decir, la probabilidad de que **no** ganemos es ______________________.

c) P (ganar) + P´(no ganar) = _____. Esto es, con toda seguridad ocurre **cualquiera** de los dos eventos: que ganemos **o** que no ganemos.

P´ (no ganar) = 1 – P (ganar)
El evento “no ganar” es el complementario del evento “ganar”.

Glosario

Evento complementario: dos eventos son complementarios cuando su unión es igual al espacio muestral.

3 Mientras más boletos adquiramos, es ____ probable que ganemos el premio.

4 Si no adquirimos boleto alguno, la probabilidad de que ganemos es _____. Es **imposible** que ganemos el premio.

5 Si compramos todos los boletos, la probabilidad de ganar el premio es ________________. Es **seguro** que ganemos el premio.

6 La _____________ de cualquier evento que no sea ni imposible ni seguro es un número mayor que ___ y menor que ___.

7 La probabilidad es una asignación numérica a los eventos de un fenómeno aleatorio, cuyos valores extremos son ____ y ____.

Si todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio son *igualmente posibles*, la probabilidad de que su evento E ocurra es:

$$P(E) = \frac{\textit{Número de posibilidades favorables a E}}{\textit{Número total de posibilidades}}$$

8 En el caso de la rifa, el número de boletos que adquiramos es el número de posibilidades _______ al evento de que ganemos, mientras que el número de boletos que **no** compremos es el número de __________ que nos son desfavorables.

9 Si adquirimos boletos, es **imposible** que, al mismo tiempo, ganemos **y** que no ganemos: P (ganar **y** no ganar) = _____. Ocurre sólo uno de los dos eventos en la realización de la rifa.

Los eventos complementarios no tienen posibilidades en común; se excluyen mutuamente.

Glosario

Eventos mutuamente excluyentes: son aquellos en los que si un evento sucede significa que el otro no puede ocurrir.

Comprendamos

Pareja

En una feria se vendieron 500 boletos para la rifa de una computadora y 3 000 boletos para la rifa de un tractor. Para los sorteos, en una tómbola se colocaron 500 bolitas numeradas como los boletos y en otra tómbola se pusieron 3 000. Luis compró tres boletos de la primera rifa y dos de la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que gane los dos premios?

Con un compañero, sigue las instrucciones y contesta lo que se pide en cada inciso.

1 Discutan y contesten si ganar el premio de una rifa *influye* en que se gane o se pierda el premio de la otra. __________. ¿Por qué?

____

2 Completen el siguiente diagrama de árbol (figura 1.26) con los eventos faltantes y en la línea junto a cada rama indiquen la probabilidad de que el evento respectivo ocurra. A la derecha de cada rama terminal del árbol escriban el **evento compuesto** por las dos rifas respectivo.

Rifa 1	Rifa 2	Eventos del espacio muestra de las dos rifas	Probabilidad de cada evento
	____ ____	______________	______
Gana			
	____ No gana	Gana la computadora y pierde el tractor	______
	____ ____	______________	______
	____ ____	______________	______
			Suma: ____

Figura 1.26

3 ¿Cómo son entre sí los cuatro eventos que componen el espacio muestral? ____________________. ¿Por qué? ______________

____

4 ¿De cuántas maneras pueden combinarse los tres números de los boletos que compró Luis para la rifa de la computadora con los dos números de los boletos que adquirió para la rifa del tractor? ______

5 ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse de extraer un número de la tómbola para la rifa de la computadora **y** un número para la rifa del tractor?

____

6 Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que Luis gane los dos premios?

____

7 Anoten al principio de la columna de la extrema derecha la probabilidad de cada evento compuesto. Al final de dicha columna escriban el resultado de la suma de las probabilidades de los cuatro eventos.

8 ¿Cuál es la probabilidad de que Luis no gane la computadora ni el tractor?

____

9 ¿A qué es igual la siguiente probabilidad y a qué evento corresponde?

p (gana la computadora y gana el tractor)
\+ p (gana la computadora y pierde el tractor)
____

Evento: ______________________________
__________ ¿Cómo son entre sí los dos eventos de los que sumaron sus probabilidades? ______________________

La probabilidad de que ocurra **cualquiera** de los eventos que se **excluyen mutuamente** es la **suma** de sus probabilidades.

10 ¿Cuál es el evento complementario al evento de que Luis gane los dos premios? ______________________

11 Comprueben que la suma de las probabilidades de que Luis gane los dos premios y de su evento complementario es 1. Es decir, es seguro que ocurra el primer evento o que no ocurra.

Si la ocurrencia de un evento **no depende** de la ocurrencia de otro, los eventos son independientes entre sí.
La probabilidad de que ocurran dos eventos **independientes** entre sí es el **producto** de sus probabilidades.

Glosario

Eventos independientes: son aquellos en los que la ocurrencia de uno no se relaciona con la ocurrencia de otro.

12 Si el tractor costó \$400 000 y la ganancia de la rifa fue de \$350 000, ¿cuánto costó cada boleto? ______________________.
Comparen sus resultados con los de otros compañeros y discútanlos.
Resumamos:

Si S es el espacio muestra de un fenómeno aleatorio, se tiene:
Para cualquiera de sus eventos E, P(E) ≥ 0.
Para el espacio muestra S, o evento seguro, P(S) = 1.
Si sus eventos E y F se excluyen mutuamente, P(E o F) = P(E) + P(F).

Integremos

Pareja

Se lanzan tres monedas ordinarias. ¿De qué manera pueden distinguir si dos eventos del fenómeno son independientes o no lo son? Sigan las instrucciones.

1 Discutan la pregunta anterior y anoten su respuesta.

____

2 En su cuaderno, tracen un diagrama de árbol para que identifiquen todos los posibles resultados del lanzamiento de tres monedas. Escriban el espacio muestra correspondiente.

____

3 ¿Cuántas posibilidades hay en total? ______________________

4 ¿Los eventos del espacio muestra son igualmente posibles? ____. ¿Por qué? ____

5 Anoten las posibilidades favorables de cada uno de los eventos del lanzamiento de tres monedas siguientes:

A: "Caen lo más dos águilas": ______________________

B: "Caen al menos dos águilas": ______________________

C: "Cae la misma cara en las tres monedas": ________________

6 ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos?

P(A) = __________; P(B) = __________; P(C) = __________

7 ¿Qué posibilidades tienen en común los eventos de cada par?

A y B: __________________; A y C: __________________;

B y C: ____

8 Para los eventos de la primera columna de la Tabla 1.11:

a) Anoten lo que se requiere en las columnas segunda y tercera.

b) En la cuarta columna, escriban si los dos eventos son independientes; es decir, si la probabilidad de la conjunción de los dos eventos en la segunda columna es igual al producto de las probabilidades en la tercera columna o no.

Tabla 1.11

Conjunción de eventos	Probabilidad de la conjunción de los dos eventos	Producto de las probabilidades individuales	¿Son independientes?
A y B	P(A y B) = _____	P(A)P(B) = _____	__________
A y C	P(A y C) = _____	P(A)P(C) = _____	__________
B y C	P(B y C) = _____	P(B)P(C) = _____	__________

9 Para cada evento, completen la segunda columna de la Tabla 1.12 con la descripción de su evento complementario; en la tercera columna anota las posibilidades de su evento complementario y, en la cuarta, la probabilidad de cada evento complementario.

Evento	Descripción del evento complementario	Posibilidades del evento complementario	Probabilidad del evento complementario
A	__________	__________	__________
B	Cae un águila o ninguna	__________	__________
C	__________	__________	__________

Tabla 1.12

10 ¿Los eventos A y B se excluyen mutuamente? _____ ¿Por qué?

____.

11 ¿Cuáles son las posibilidades favorables al evento D: "Una de las tres caras que caen es distinta"? ______________________.

12 ¿Los eventos C y D son mutuamente excluyentes? _____. ¿Por qué?

____.

13 ¿Cómo son entre sí los eventos "cae sólo un águila" y "caen dos águilas"? ______________. ¿Por qué? ______________________

____.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y discútanlas.

Si la probabilidad de la **conjunción** de dos eventos es igual al **producto** de la probabilidad de un evento por la probabilidad del otro, los eventos son **independientes** entre sí.

Apliquemos

1 En una feria, a un jugador se le presentan tres botes idénticos: uno contiene una tarjeta, otro dos y el otro tres; en cada bote, exactamente, una tarjeta está marcada. Un jugador escoge al azar un bote y también elige al azar una tarjeta de su contenido; si la tarjeta no está marcada, gana un regalo. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane el regalo?

Individual

En el árbol de posibilidades de las dos elecciones al azar (Tabla 1.27), escribe:

a) En la primera y segunda columnas, los eventos correspondientes a las elecciones al azar de un bote y una tarjeta.

b) En la rama correspondiente a cada evento, su probabilidad.

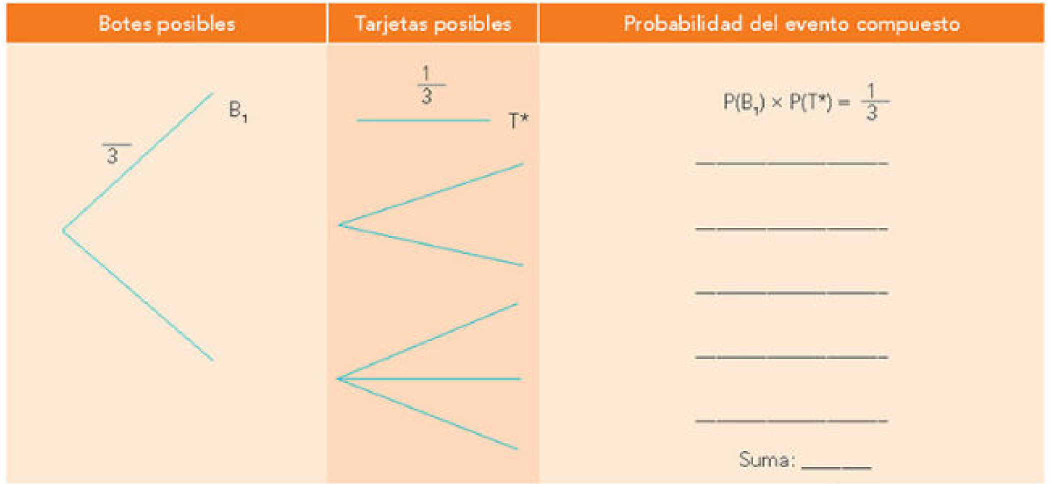


Figura 1.27

c En la tercera columna, indica la probabilidad de que se seleccione al azar cada bote y una de las tarjetas que contiene. Al final, suma las probabilidades que calculaste y escribe el resultado.

d ¿Cuál es la probabilidad pedida? ______________________

e ¿Cuál es la probabilidad de extraer una tarjeta marcada? ____ ¿Por qué? ______________________

2 Se lanza un volado. Si cae águila, se lanza otro. Si no cae águila en el primero, se lanzan otros dos volados. Se ganan $100 si no caen águilas, pero cada vez que caiga una se deben pagar $10.

a En tu cuaderno, traza un diagrama de árbol para el fenómeno aleatorio que se propone y anota aquí el espacio muestra respectivo.
____

b ¿Cuáles son tus pérdidas posibles y cuáles son sus probabilidades?
____

c ¿Cuál es la probabilidad de que ganes?
____

3 De los registros del desempeño de un equipo de futbol se tienen los siguientes eventos y sus probabilidades:
A: No anotar goles; P(A) = 20%
B: Anotar exactamente un gol; P(B) = 15%
Determina las probabilidades P(A y B) y P(A o B).

a ¿Cuál es el evento "A y B"? ______________________
b P(A y B) = ______________________
c ¿Cuál es el evento "A o B"? ______________________
d P(A o B) = ______________________

Discute tus respuestas con tus compañeros.

Lección 7

Encuesta, muestra y datos

En esta lección aprenderás a diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.

Conocimientos previos

Responde lo siguiente.

1 Menciona una encuesta en la que te hayan interrogado. ______________________

2 ¿Acerca de qué te preguntaron y dónde? ______________________

3 ¿Para qué te interrogaron? ______________________

4 ¿A qué población se habrá dirigido esa encuesta? ______________________

5 Discute con un compañero qué se necesita para elaborar una encuesta y cuáles son sus componentes. ______________________

Glosario

Encuesta: es un procedimiento para tomar decisiones o dar respuesta a problemas concretos de la realidad observable. Con la encuesta se obtienen datos interrogando a los miembros de una parte de la población en esa realidad.

Población: es un conjunto cualquiera de individuos (unidades) con alguna característica en común.

Situación problemática

En 2006, el INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática) realizó una encuesta nacional acerca de las prácticas de lectura de los alumnos de educación básica en el hogar. La Tabla 1.14 presenta los resultados de esa encuesta para los alumnos de cuarto a sexto de primaria y de secundaria.

Resultados en porcentajes de los motivos por los que los alumnos de cuarto a sexto de primaria y de secundaria leen en casa.

	Total Nacional	Motivo de lectura en casa[1]					
		Libros	Periódicos	Redes sociales	Revistas	Sitios web	Historietas o cómics
Hombre	6 098 708	93.4	95.7	92.9	75.1	82.9	6.6
Mujer	5 947 975	96.5	96.6	93.6	79.7	87.7	3.5
Nacional	12 046 683	94.9	96.1	93.2	77.4	85.3	5.1

Tabla 1.13

[1] La distribución del motivo de lectura en casa puede ser mayor de 100% por los casos en que se respondió más de una opción.
Fuente: Documento: Inegi, *Encuesta Nacional sobre Prácticas de Lectura 2006. Tabulados Básicos*, pág. 78
http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos//prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/2104/702825460808/702825460808_2.pdf
Sitio de descarga: http://www3.inegi.org.mx/sistemas/biblioteca/ficha.aspx?upc=702825460808
Fecha de consulta: 24 de enero de 2017.

Pareja

¿Sabes cuáles son las prácticas de lectura en el hogar de los alumnos de tu secundaria? Con un compañero, discute y contesta las preguntas.

1. ¿Cuál es la característica común de los encuestados por el INEGI a los que se refiere la Tabla 1.13? ______
2. ¿A qué problema concreto se destinó la encuesta? ______
3. ¿Qué harían para investigar si el motivo más frecuente de lectura reportado en esa encuesta coincide con el de los alumnos de su secundaria? ______
4. ¿Por qué sería importante considerar si el encuestado es hombre o mujer y su edad? ______
5. En 2006, el total de alumnos solamente de secundaria general era 5 407 198. ¿Cómo habrá recopilado el INEGI los datos de esta encuesta? ______

Los entrevistadores del INEGI interrogaron sólo a 32 040 alumnos de secundaria, una **muestra** o parte de toda la población de secundaria general. La muestra estuvo distribuida en todo el país. La Figura 1.28 presenta las preguntas:

Secciones I y V del cuestionario para secundaria que planteó el INEGI (http://www.inegi.org.mx/ est/contenidos/Proyectos/encuestas/otras/enpl/default.aspx).

I. Datos Personales

1.1 ¿Cuál es tu nombre?
Anotar el nombre completo del entrevistado ______

1.2 Sexo
Hombre 1
Mujer 2

1.3 ¿Cuántos años tienes?
|__|__|
anote con número

1.4 ¿En qué grado vas?
1º de secundaria 1
2º de secundaria 2
3º de secundaria 3

V. Prácticas de lectura en el hogar

5.1 Lees en tu casa?
Circula una sola opción
Sí 1
No 2 Pase a 5.4

5.2 ¿En tu casa lees:
Circula una opción afirmativa
Libros de texto? 1
Otros libros? 2
Periódicos? 3
Revistas? 4
Historietas? 5
Otros ______
especifica

5.3 ¿En tu casa lees:
Circula una opción afirmativa
para hacer la tarea? 1
para estudiar para los exámenes? 2
para informarte sobre temas de tu interés? 3
porque te gusta? 4
Otros ______
especifica

5.4 ¿Cuántos libros completos leíste en el año 2006?
|__|__|
anota con número
Si la respuesta es ninguno termine la entrevista

5.5 De estos libros que leíste, menciona los títulos que recuerdas:
______
______
______
Escribe la respuesta del informante

Figura 1.28

Las preguntas 1.1 y 1.3 son **preguntas cerradas**, pues se responden de manera única. Las preguntas 1.2, 1.4, 5.1, 5.2 y 5.3 son de **opción múltiple** porque tienen más de una respuesta posible. Las preguntas 5.4 y 5.5 son **abiertas**, pues admiten una variedad de respuestas.

En pareja respondan lo siguiente:

1. Anoten en su cuaderno las respuestas a cada una de las preguntas que planteó el entrevistador del INEGI con el número de la pregunta y el código de la opción en las de opción múltiple. Para la pregunta 5.4, en lugar de 2005 considera el **año anterior al actual**.

2 ¿Con qué fin se habrá incluido la opción "Otros" en la pregunta 5.3? _____________. ¿Tiene alguna ventaja incluir una opción así? ____ ¿Por qué? ____.

3 ¿Cuál fue el objetivo de la encuesta del INEGI con las preguntas de la sección V? ____.

Para lograr una encuesta exitosa se debe: a) establecer su objetivo con claridad; b) determinar la población a la que va dirigida; c) plantear las preguntas que corresponden a ese objetivo; y d) registrar los datos a medida que se recopilan.

4 Si la muestra de 32 040 alumnos sólo hubiera sido del Distrito Federal o de Monterrey, ¿los resultados hubieran sido válidos para el resto del país? _____________ ¿Por qué? ____.

Comprendamos

Reunir datos de tu secundaria acerca de los hábitos de lectura de sus alumnos en casa requiere el número de grupos por grado, el nombre del grupo y su número de alumnos. Esta información es la **base** de la encuesta; la **población** es la totalidad de alumnos inscritos, o **unidades** estadísticas.

Con tu grupo organiza la encuesta así:

1 Formen tres equipos de 10 alumnos más o menos (según el tamaño del grupo) y elijan un representante para cada uno.

2 Los representantes marcarán tres papelitos con "1°", "2°" y "3°"; los doblarán, los meterán en una caja, la agitarán para que se mezclen y, sin ver, cada representante sacará un papelito.

3 Con su equipo, cada representante etiquetará una caja con el grado que le tocó en el paso anterior y meterá en ella un papelito *por* grupo de ese grado, marcado con el nombre del grupo. El representante mezclará los papelitos y un compañero de equipo sacará uno sin ver. Así, ese equipo tendrá asignado por azar un grupo de su secundaria.

4 Cada equipo numerará consecutivamente tantos papelitos como alumnos haya en la lista del grupo seleccionado. El representante los doblará, los depositará en la caja, los mezclará y cada integrante del equipo extraerá al azar tres papelitos, cuyos números serán los de lista de los tres alumnos del grupo seleccionado que interrogará.

5 ¿Cuál es el tamaño de la muestra seleccionada, es decir, cuántas unidades estadísticas contiene? ______ ¿Por qué? ____

Glosario

Tamaño de la muestra: es el número de sujetos (o unidades estadísticas) que componen la muestra extraída de una población.

6 Acuerden fecha y hora en que aplicarán la encuesta. Repasen las preguntas del INEGI con su código de opciones.

7 Cada entrevistador anotará en su cuaderno el grupo y el número de lista de cada entrevistado y sus respuestas.

Se formó así una muestra aleatoria, o **probabilística**, de la población de tu secundaria porque los grupos a encuestar se seleccionaron *al azar*; cada uno tuvo la *misma oportunidad* de haber sido seleccionado. La muestra también es **estratificada**, porque considera a sus individuos, o unidades, por *estratos*, o sea por subconjuntos de individuos con una característica común, como el grado que cursan o su género. Esta muestra es **representativa** de la población de alumnos de tu secundaria (o de la población del turno que hayan considerado).

Glosario

Muestra aleatoria: es la que se obtiene por un procedimiento de elección al azar o por sorteo.

Integremos

En equipo, concentren todos los datos. Por turnos y por pregunta, cada uno dirá las tres respuestas que obtuvo.

1 En la celda debajo de cada opción de la Tabla 1.14 dibuja una raya vertical (|) para cada elección de esa opción hasta cuatro veces y la quinta, cruza el grupo de cuatro rayas con una diagonal (\). Repite el marcaje hasta agotar las selecciones de la opción.

Este agrupamiento se llama *tali* (en latín), o *tarja*, y facilita el conteo de selecciones de cada opción.

Opciones	1	2
Tali		
Total		
Porcentaje		

Tabla 1.14

La tarja es conveniente para encuestas sencillas. Por opción, anota el total de *talis* y el porcentaje respectivo.

2 Registra las frecuencias de las opciones de las preguntas 5.1, 5.2 y 5.3 en la Tabla 1.15. "NA" significa "no aplica".

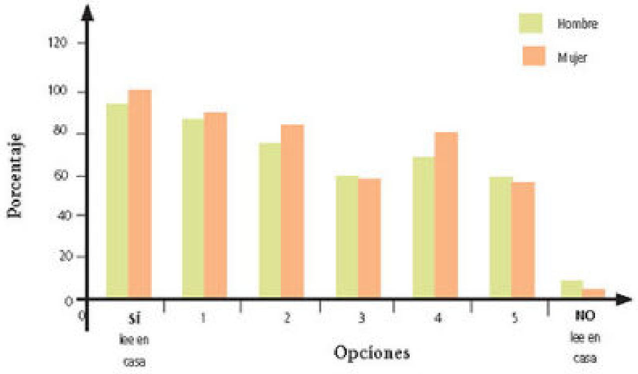
Equipo: ____	Grupo: ___	Número de entrevistados: ______			Fecha: ________	
Opciones / Preguntas	1	2	3	4	5	Otros
5.1			NA	NA	NA	NA
Hombre						
Total						
Porcentaje						
Mujer						
Total						
Porcentaje						
5.2						
Hombre						
Total						
Porcentaje						
Mujer						
Total						
Porcentaje						
5.3					NA	
Hombre						
Total						
Porcentaje						
Mujer						
Total						
Porcentaje						
5.4	Media aritmética					
Hombre						
Mujer						

Tabla 1.15

3 La Gráfica 1.7 de barras resume los resultados del INEGI para el estrato de edades de 14 a 15 años. Traza abajo una gráfica de barras que resuma los datos de tu equipo. ¿Qué tanto se parecen las dos gráficas? ________ ¿Por qué? ____
____

Hábitos de lectura en casa del grupo __________________ de la secundaria ________________

Hábitos de lectura en casa, de los alumnos de 4° a 6° de primaria y secundaria



Gráfica 1.7

Glosario

Media aritmética: es el promedio de un conjunto de números que se obtiene al sumar todos los números y dividiéndolo entre n.

Moda: es el valor con mayor frecuencia en una distribución de datos.

4 Concentren las respuestas a la pregunta. Calcula la media aritmética de las cantidades de libros que los encuestados leyeron el año anterior: ______. En 2006, el INEGI reportó para esa pregunta en la escuela secundaria 2.5 libros por alumno leídos durante el año anterior. ¿Difiere notablemente esta cifra de su resultado? ________ Si es así, ¿a qué puede deberse la diferencia? ______________________________

5 ¿Cuántos títulos se repitieron y con qué frecuencia? ____________ ¿Cuál es la moda? ______________________________

Ante la dificultad de obtener datos de toda la población, lo que correspondería a un *censo*, se elaboran las encuestas aplicándolas a una parte, o **muestra**, de la población. Si la muestra es **representativa** de la población, los datos podrán extrapolarse a la población, con un margen de error que tome en cuenta el procedimiento de selección de la muestra.

Apliquemos

Grupo

"Una encuesta a nivel nacional aplicada por el INEGI en 2012 reveló que casi la cuarta parte de los usuarios de internet tenía de 12 a 17 años de edad". (Fuente: http://www.inegi .org.mx/sistemas/sisept/default.aspx?t=tinf229&s=est&c=26482).

En grupos de cinco alumnos diseñen una encuesta relacionada con el uso de internet por los alumnos de secundaria.

1 Discutan y acuerden qué les interesaría conocer al interrogar a otros alumnos acerca de su uso de internet:

____

Esto define su **objetivo** al aplicar una encuesta en su escuela.

2 Ya que la **población** son los alumnos de secundaria, decidan cómo seleccionarán la **muestra** a la que interrogarán: _______________

3 ¿Su muestra será **representativa** de la población de alumnos de secundaria? ___. O ¿los entrevistados deberán satisfacer alguna condición, como ser "voluntarios"? _______________

4 ¿Con qué datos identificarían las **unidades** estadísticas? ¿Nombre, edad, grado, alumno regular o irregular...? _______________

5 ¿Qué **preguntas** plantearían en su encuesta? Acuerden y anoten una lista de cinco: _______________

6 ¿Corresponden esas preguntas al objetivo propuesto? _______________

7 ¿Cuáles serían preguntas **abiertas**? _______________

8 ¿Cuáles serían preguntas **cerradas**? _______________. En este caso, ¿cuáles serían las opciones? _______________

9 ¿Alguna pregunta propondría clasificar las opciones, como: "Me gusta usar internet"?:

Nada ______,

Regular ______,

Mucho ______.

Recuerda

Preparen una presentación electrónica de su encuesta; debe contener: título, introducción y objetivo, muestra, el cuestionario que diseñaron, tabla de datos recopilados, gráfica o gráficas y conclusiones. Preséntenla ante el grupo.

10 Revisen que sus preguntas no sugieran la respuesta al encuestado.

11 ¿En qué orden plantearán las preguntas? _______________

12 Anoten sus preguntas en sus cuadernos y pruébenlas planteándoselas a dos o tres personas.

13 Afinen su cuestionario.

14 Cada uno debe encuestar a cinco personas de la población que hayan decidido. ¿Cuál será el tamaño de su muestra? _______________

15 Las respuestas a cada pregunta deben quedar claramente anotadas en sus cuadernos, lo mismo que las características del encuestado (vean el inciso 3).

16 Acuerden día, hora y lugar en que aplicarán su encuesta.

17 Recopilen los datos de los encuestados.

18 Reúnanse para concentrar todos los datos por pregunta y por opción (si las hay) en una tabla y calculen los porcentajes respectivos.

19 Interpreten sus resultados. ¿Lograron el objetivo de su encuesta? ______ ¿Por qué? _______________

20 Discutan con qué tipo (o tipos) de gráfica resumirán sus resultados.

TIC

Preparen una presentación de su encuesta en un software de diapositivas que contenga: título, introducción y objetivo, muestra, el cuestionario que diseñaron, tabla de datos recopilados, gráfica o gráficas y conclusiones. Preséntenla ante el grupo.

Evaluación

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, al terminar muéstralos a tu profesor para su evaluación.

1. De las siguientes ecuaciones de segundo grado, elige aquellas que sean ecuaciones incompletas y busca la solución.

$3x^2 = 5x$ $\qquad$ $5x^2 - 3x + 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 9 = 90$

2. Construye un triángulo que tenga la misma forma del que se muestra a la derecha, de manera que ahora su lado menor mida 5 cm.

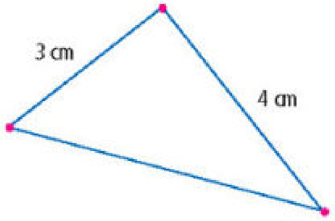


Figura 1.29

¿Son semejantes los triángulos que aparecen en la cuadrícula? ________

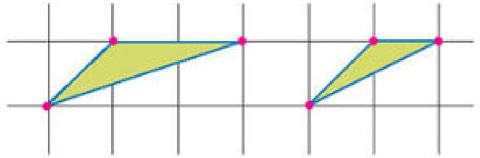


Figura 1.30

Explica tu respuesta. ____

¿Qué criterio utilizaste?____

3. En el estado de Chihuahua se encuentra el lago de Arareco, ubicado en lo alto de la Sierra Madre Occidental. Tiene una longitud de 3 km, forma de "U" y una superficie de 40 hectáreas. Este lago es un lugar turístico donde se pueden apreciar hermosos paisajes, está rodeado de grandes bosques coníferas y otros árboles y espectaculares formaciones rocosas. Cerca del lago se va a construir una cerca similar a la que se muestra en la siguiente figura, cuya longitud es de 180 metros.

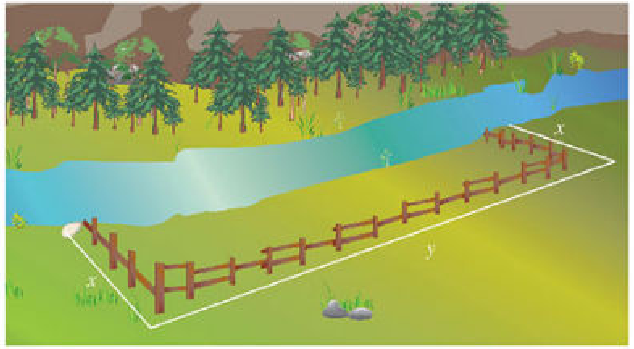


Figura 1.31

a ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la longitud de la cerca?

$180 = x + 2y$ $\qquad$ $180 = 2x + 2y$ $\qquad$ $180 = x + y$ $\qquad$ $180 = 2x + y$

b ¿Cuál de los valores asignados a la variable x en la siguiente tabla son posibles para el caso de la cerca?

Opción	x (metros)	y (metros)
a)	0	180
	90	0
b)	30	120
	60	60
c)	10	170
	60	50
d)	120	60
	35	55

Tabla 1.16

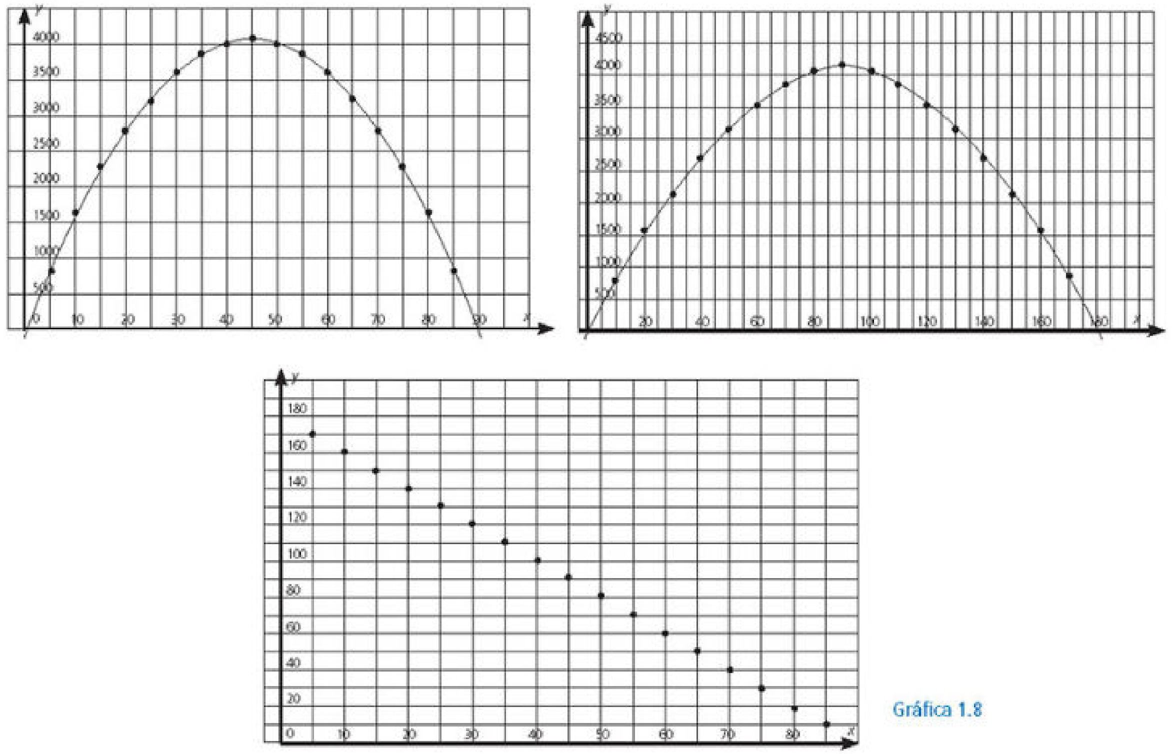
c La cerca construida se ocupará para delimitar la siembra de diversas flores, para ello se cerrará a forma rectangular (se cercarán los cuatro lados). ¿Qué medidas deberá tener la variable x (ancho del rectángulo) para que la superficie a sembrar sea mayor que 4 000 m²? Construye una tabla como la siguiente:

x (m)	y (m)	Área del rectángulo (m²)
5	170	850
10	160	1600
15	150	2250
20	140	2800
25	130	3250
30	120	3600
35	110	3850
40	100	4000
50	80	4000
60	60	3600

Tabla 1.17

5 a 29 m $\qquad$ 21 a 39 m $\qquad$ 51 a 59 m $\qquad$ 41 a 59 m

d En cada una de las siguientes gráficas, coloca en ambos ejes los datos que representan.


Gráfica 1.8

e ¿Qué medidas deberá tener la variable *y* (largo del rectángulo) para que la superficie a sembrar sea menor que 4 000 m²?

____

____

Bloque II

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	1	8	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras	2	9	
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	3	10	
	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	4	11	
Manejo de la información		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	5	12	
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	6	13	

Lección 1

Ecuaciones cuadráticas y factorización

En el bloque I desarrollamos ideas acerca de la representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática. En el bloque II vamos a resolver ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Conocimientos previos

Las ecuaciones cuadráticas se expresan de manera general así:

$$x^2 = k$$

La letra x representa el número buscado y la k es un número particular positivo. Éste es un tipo de ecuaciones de segundo grado y una manera de encontrar el valor de x es calculando la raíz cuadrada de k. Observen que si k es positiva, hay dos números que al elevarlos al cuadrado dan como resultado k. Si k fuera un número negativo no existen soluciones para la ecuación. Comenten en grupo cuáles son los dos números cuando sí hay solución y escriban una justificación de por qué si es negativa no hay soluciones.

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas. Puedes utilizar una calculadora.

$x^2 = 169$ $t^2 = 729$ $y^2 = 12\,996$ $x^2 - 625 = 0$

Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Situación problemática

Individual

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado dependiendo de su estructura. En esta lección veremos la resolución de ecuaciones de las formas $x^2 = k$ y $(x + a)^2 = b$

1 Responde las siguientes preguntas:
- a ¿Qué números elevados al cuadrado dan 81? ________________
- b ¿Qué números elevados al cuadrado dan 625? ________________
- c ¿Qué números elevados al cuadrado dan -49? ________________

2 Lee el siguiente problema y resuélvelo en tu cuaderno por medio de una ecuación de segundo grado.
Se va a colocar el zoclo de madera en una habitación de forma cuadrada, ¿cuántos metros lineales de zoclo se necesitan si el área del piso es de 36 m^2?

3 A una de las ventanas de forma cuadrada cuya área es de 3 600 cm^2 y le falta el vidrio, ¿cuáles son las medidas de la ventana para comprar el vidrio?
____

4 En la pared de la habitación se van a colgar tres espejos todos de forma cuadrada, ¿cuántos cm miden los lados de cada espejo si sus áreas son de de 81 cm^2, 49 cm^2 y 144 cm^2? ________________

5 En cada uno de los ejercicios anteriores se pueden ensayar diversos valores hasta encontrar el número buscado. ¿Hay más de un número que cumpla con lo que se pide? ____________ ¿En cuáles casos no es posible encontrar la solución? ________________

Comprendamos

Pareja

1 Si pudieron resolver ecuaciones de segundo grado como las de la actividad anterior, es fácil solucionar ecuaciones como la siguiente:

$$(x^2 - 8)^2 = 16$$

En pareja, realicen lo que se les pide:

a Encuentren los números que elevados al cuadrado den 16.
____

b Utilicen esos números para completar las siguientes igualdades:

$x - 8 =$ __________ $x - 8 = -$__________

¿Cuáles son los dos valores de x que resuelven la ecuación $(x^2 - 8)^2 = 16$?
____

Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

2 Resuelvan en su cuaderno la ecuación $(x + a)^2 = b$ en los siguientes casos:

$a = 3, b = 25$ $a = -2, b = 400$

3 También en pareja, escriban una ecuación que resuelva los siguientes problemas.

a El área de un triángulo rectángulo es de 12 m^2. Encuentren las dimensiones de los catetos si se sabe que difieren entre sí 1 m.
____

b) Un granjero construye un corral rectangular y aprovecha la pared de su casa como uno de los lados. La superficie del corral es de 750 m^2 y en los otros lados emplea 80 m de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del corral?

____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Integremos

Hemos visto dos tipos de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, así como la forma de resolverlas.

1. $x^2 = k$, con k mayor o igual que cero, la cual podemos escribir como sigue:

   $x^2 = k$, cuyas soluciones son $x_1 = +\sqrt{k}$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{k}$

2. con b mayor o igual a cero, que también puede escribirse como:

   $(x - a)^2 = b$, cuyas soluciones son $x_1 = a + \sqrt{b}$ $\qquad$ $x_2 = a - \sqrt{b}$

Apliquemos

Individual

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 = 225$

   b) $(x - 10)^2 = 144$

   c) $(x - 15)^2 = 900$

2. Escribe en tu cuaderno una ecuación que resuelva el siguiente problema:

   Encuentra la altura de un triángulo cuya área es de 18 cm^2; su base mide 3 cm más que su altura.

Traslación y rotación de figuras: descubriendo sus propiedades

Lección 2

En esta lección aprenderás a determinar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras; a construir y reconocer diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Conocimientos previos

En la cuadrícula de la Figura 2.1 están señalados los puntos *A, B, C* y *D*.

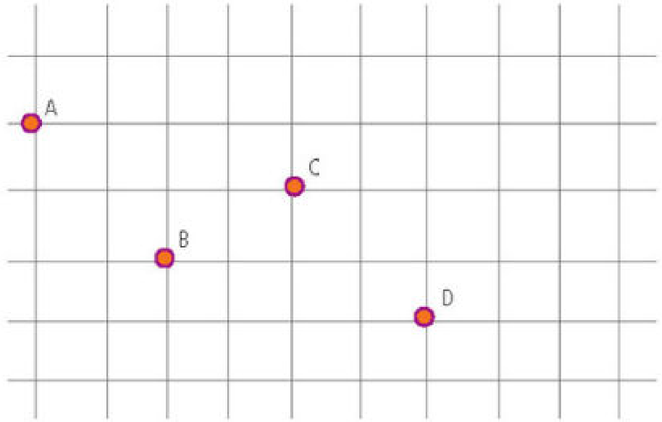


Figura 2.1

1. Mueve cada uno de los puntos (A, B, C y D) dos unidades hacia abajo y etiquétalos con la misma letra y una coma en el extremo superior derecho, es decir, A´, B´, ______.

2. Mueve cada uno de los puntos (A, B, C y D) tres unidades hacia la derecha y etiquétalos con la misma letra y una raya horizontal sobre dicha letra, esto es, $\overline{A}$, ______________.

3. Une A con A´ por medio de una flecha para indicar que iniciaste en A y terminaste en A´. También dibuja flechas para los pares de puntos B y B´, C y C´, D y D´. ¿Son paralelas las flechas dibujadas? _______. ¿Tienen el mismo sentido? ________. ¿Todas son del mismo tamaño? __________.

4 En lugar de dibujar todas las flechas pudo haberse elegido una sola flecha para indicar cómo mover los cuatro puntos A, B, C y D. Hazlo sobre la cuadrícula.

Situación problemática

En el ensayo cinco bailarines (figura 2.2) están ubicados en las posiciones *A, B, C, D* y *E* formando la figura morada, el profesor les ha pedido que formen la figura color naranja.

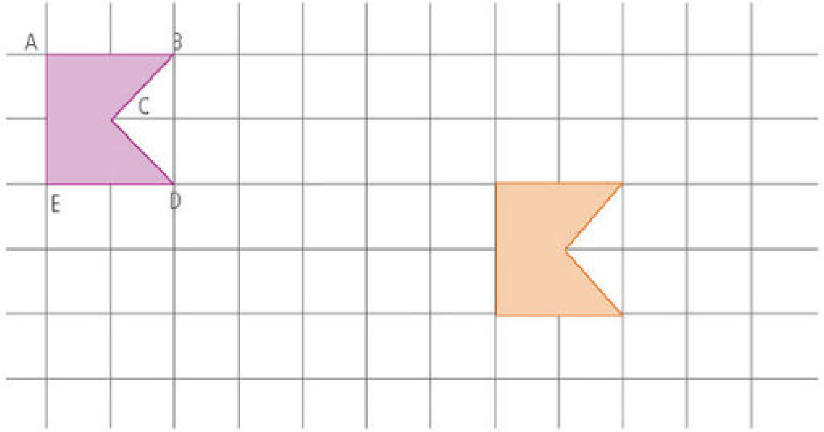


Figura 2.2

Individual

1 Escribe las letras *A´, B´, C´, D´, E´* donde corresponda en la figura naranja.
¿Cuántos pasos deben dar los bailarines en las posiciones A, C y D para llegar a la nueva posición? ____________________.
¿En qué dirección? ____________________.
Rosario dice que el bailarín de la posición E debe avanzar ocho pasos al frente y tres pasos a la derecha, ¿es correcto? __________.
Argumenta tu respuesta ____________________.
Comenta con tus compañeros qué similitudes encuentran en los pasos que debe dar cada bailarín, y anoten sus conclusiones.

____

Comprendamos

Individual

1 Describe con tus propias palabras lo que les pasa a todos los puntos de una figura cuando un punto o una figura, constituida por puntos, se mueve según un vector.

____

____

2 Para la Figura 2.3, construye la figura final cuando se utiliza el vector que aparece en ella.

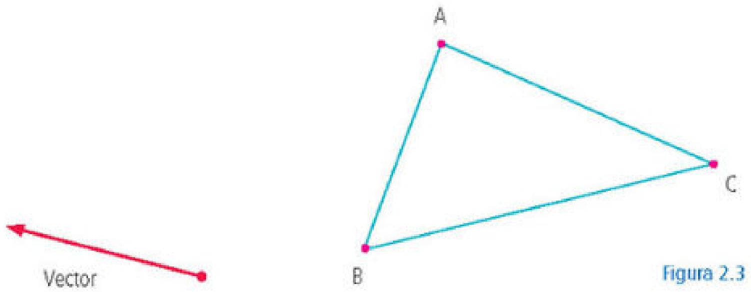


Figura 2.3

¿Qué figura obtuviste? ________________. ¿En qué se transforma el vértice *A*? ________________. Y el vértice *B*, ¿en qué se transforma? ____________.
¿En qué se convierte el segmento *AB*? ____________. ¿En qué se convierte el ángulo *ABC*? ____________.

3 ¿En cuál de los dos cuadros de la Figura 2.4 se utilizó un vector?

____

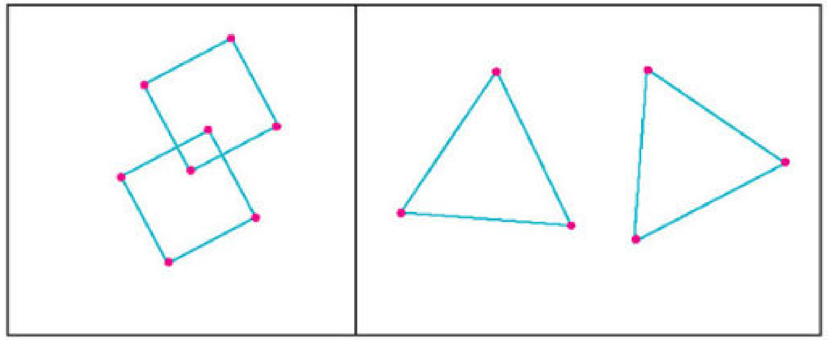


Figura 2.4

Explica tu respuesta.

____

4 En una traslación, un segmento y su transformado deben ser __________, y las longitudes entre los segmentos inicial y final tienen que ser __________.

Glosario

Traslación: transformación geométrica que mantiene la forma, el tamaño y la orientación de las figuras.

Integremos

Individual

1 En la figura 2.5 construye, en cada caso, la figura transformada según el vector señalado.

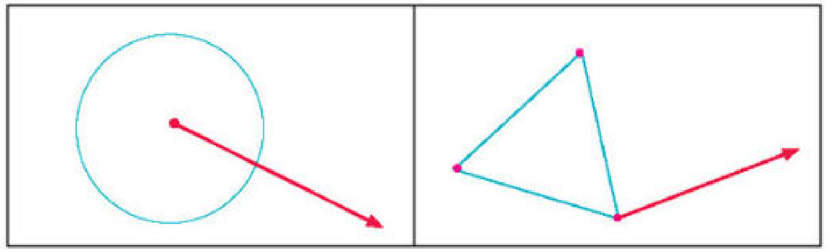


Figura 2.5

Describe tu construcción de cada caso.

____

____

____

2 En los triángulos de la Figura 2.6, construye el vector de la traslación que lleva a uno en el otro.

Figura 2.6

¿Cuántas soluciones encontrarías? ______________. Coméntalo con uno de tus compañeros y si llegan a un acuerdo, dibújalas sobre la figura.

3 Enlista las características entre una figura inicial y la figura final, según un vector dado, para dicha traslación. Coméntalas con el grupo y escribe lo acordado.

____

____

Apliquemos

Individual

1 Para el rectángulo de la Figura 2.7, construye la figura final que resulta de aplicar la traslación indicada por el vector dado.

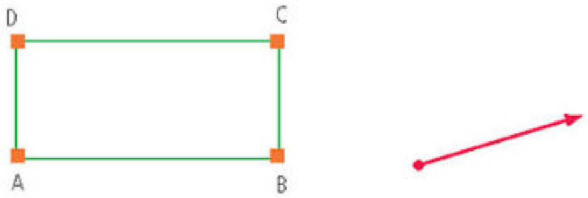


Figura 2.7

Etiqueta los vértices de la figura final que construiste utilizando las mismas letras con una coma en el extremo superior derecho para vértices correspondientes. ¿Son congruentes las figuras inicial y final? ____________. Compara tu respuesta con la de otros compañeros.

2 ¿Cómo verificarías si uno de los dibujos que aparecen en la Figura 2.8 es la traslación del otro? Explica qué elementos considerarías para responder la pregunta.

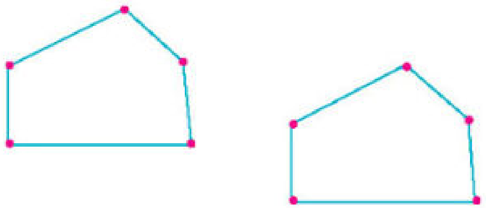


Figura 2.8

____

____

____

Situación problemática

En el siguiente radar (figura 2.9) el punto A tiene una distancia al origen O y además un ángulo cuyos lados son: la semirrecta y el segmento OA, que diferencia al punto A de cualquier otro punto sobre el mismo círculo.
Mariano requiere mover los puntos A, B y C a un mismo ángulo: 90° en la dirección contraria a las manecillas de un reloj, esto es, el sentido positivo.

Glosario

Radar: dispositivo que permite ubicar la posición de cualquier punto, utilizando círculos concéntricos, cuyos radios dan la distancia al origen O y un ángulo, donde un lado es una semirrecta fija.

Individual

1 Localiza las nuevas posiciones para A, B y C, etiquetándolos por A', B' y C', respectivamente. Describe el procedimiento que seguiste para localizar cada uno de los puntos

____

____

Coméntalo con tus compañeros.

2 Coloca otros puntos E, F y G cada uno en un círculo diferente de manera que estén alineados ¿Qué ocurrirá a los puntos correspondientes E', F' y G', si el ángulo de rotación es el mismo para los tres puntos E, F y G? ______________

3 Discútelo con tus compañeros y anota la conclusión a la que llegaron.

____

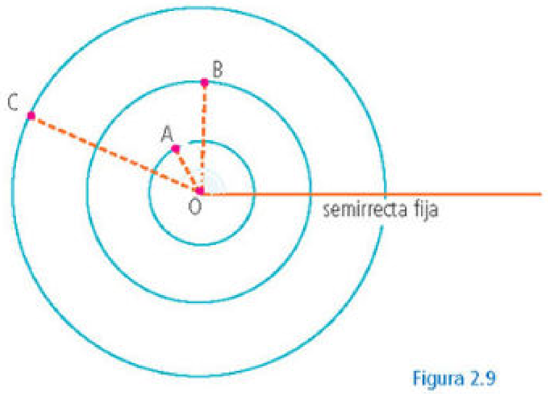


Figura 2.9

Comprendamos

Individual

1 La rotación o giro de un segmento en cierto ángulo, respecto al punto *O*, puede elaborarse de dos maneras, como se muestra en la Figura 2.10:

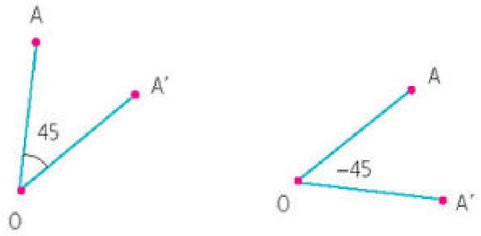


Figura 2.10

En la figura de la izquierda, *OA* se mueve un ángulo de 45 grados para coincidir con *OA* ´, es decir, el giro se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj y entonces se considera positivo, mientras que en la figura de la derecha lo que ocurre es: ______________________________
____.

2 En la Figura 2.11, el triángulo sin etiquetar se obtuvo al rotar el triángulo *ABC* un cierto ángulo alrededor del punto *O*.

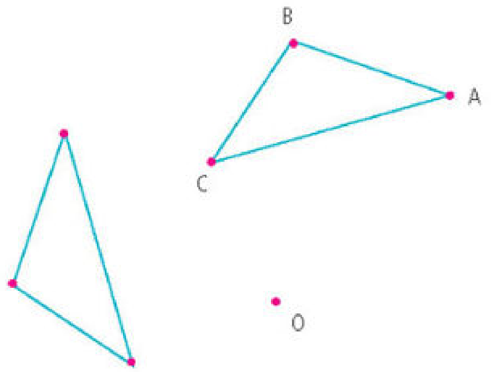


Figura 2.11

Etiqueta los vértices del triángulo rotado y encuentra la medida del ángulo utilizado en dicha rotación. ______________________.
Describe al grupo cómo hallaste la respuesta.
____
____

3 Rota un ángulo de 180 grados, respecto al punto *O*, el triángulo de la Figura 2.12.

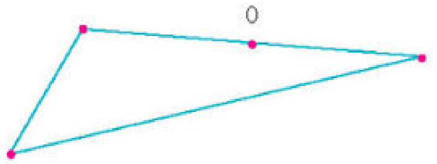


Figura 2.12

Etiqueta los vértices del triángulo inicial y los vértices del triángulo rotado. ¿Cómo son entre sí ambos triángulos? ____________. Discútelo con tus compañeros.

¿Qué elementos del triángulo inicial y final son iguales?
____
____

4 En la Figura 2.13, el cuadrado sin etiquetas en sus vértices se obtuvo de una rotación respecto al centro *O* del cuadrado *ABCD*, como centro de rotación, utilizando un ángulo de -120 grados.

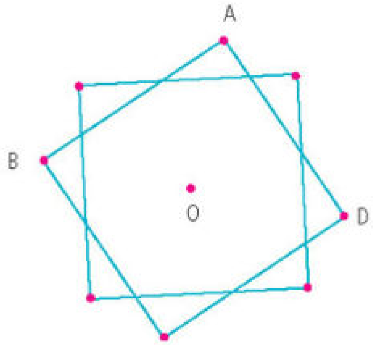


Figura 2.13

Etiqueta los vértices correspondientes del cuadrado rotado (con la misma letra y una coma en su extremo superior derecho) y explica a tus compañeros cómo lo hiciste.
____
____

Integremos

Individual

1 En la Figura 2.14 los triángulos señalados se corresponden a través de una rotación. Etiqueta los vértices correspondientes del triángulo rotado usando la misma letra con una coma superior derecha. ¿Qué ángulo se usó en dicha rotación? ____________________

¿Cuántas rotaciones convierten a uno de los triángulos en el otro? __________. Compara tus respuestas con otro de tus compañeros.

2 Cuando se rota una figura, ¿qué elementos de ambas figuras resultan iguales? Enuméralos.
____
____

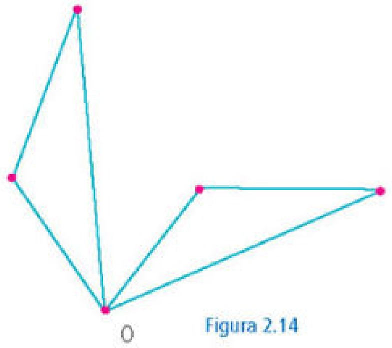


Figura 2.14

Preséntalos al grupo y escribe aquellos en los que hubo acuerdo.

____

____

3 En cualquier rotación, ¿la figura dada y la rotada son congruentes? ______________. Discútelo con tus compañeros.

Apliquemos

Individual

1 Identifica el centro de rotación de los triángulos y la medida del ángulo de rotación en cada uno de los dibujos de la Figura 2.15.

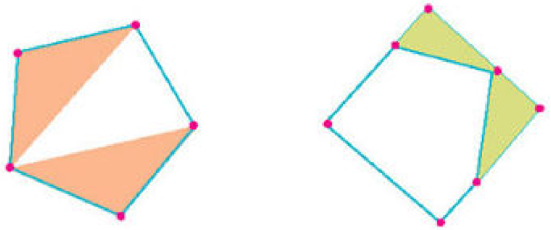


Figura 2.15

Discútelo con tus compañeros y escribe las soluciones para cada caso.

____

____

2 En la rotación del segmento que aparece en la Figura 2.16, el punto I es interior al segmento inicial, ¿dónde se localiza en el segmento rotado?

Describe cómo lo hallaste.

____

____

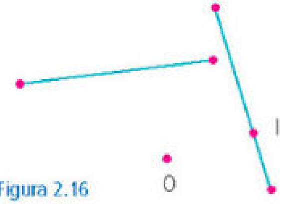


Figura 2.16

¿Cómo podrías verificar dicha localización?

____

____

3 Traza en tu cuaderno un triángulo y elige un vértice del mismo como centro de rotación y un ángulo de 180 grados. Construye el triángulo correspondiente a esta rotación. Con segmentos punteados, une los vértices correspondientes. ¿Son concurrentes dichos segmentos punteados? ___________. Coméntalo con tus compañeros y describe lo que llamó su atención.

____

____

Lección 3

Diseños geométricos

En esta lección apenderás a determinar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras; a construir y reconocer diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Glosario

Simetría axial: existe simetría axial cuando los puntos de una figura coinciden con los de otra al tomar como referencia una línea conocida como eje de simetría.

Rotación: se da cuando un cuerpo se mueve en círculos alrededor de un punto fijo.

Traslación: es el movimiento de una figura sin rotarla ni voltearla.

Conocimientos previos

Describe el movimiento o transformación utilizada en la construcción de cada uno de los dibujos que aparecen en la Figura 2.17.

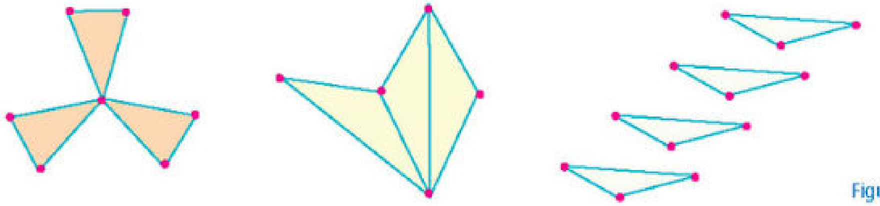


Figura 2.17

____

____

____

Situación problemática

Observa la Figura 2.18, es una pared de la zona arqueológica en Mitla, Oaxaca, donde hay diferentes motivos y movimientos en ellos.

Individual

1 Remarca con color rojo el motivo original y de color verde los motivos con movimiento (simetría axial, rotación o traslación).

2 Describe el movimiento aplicado en cada caso encontrado.

____

3 Compara con tus compañeros los movimientos que encontraste, vean si hay coincidencias o argumenten las diferencias y escribe la conclusión a la que llegaron.

____

Figura 2.18

Comprendamos

Individual

1 A partir de una figura y utilizando algunas de las transformaciones: *simetría axial, traslación* y *rotación*, debe generarse un diseño particular como el que se muestra en la Figura 2.19.

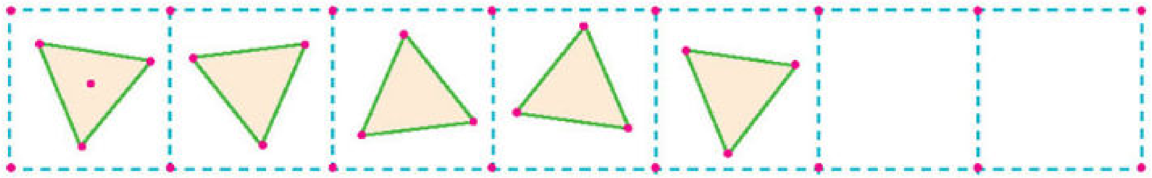


Figura 2.19

¿Cuál es la figura inicial? ________. ¿Qué transformaciones se usaron? ____

Construye las figuras correspondientes a los dos últimos cuadros. Compara tus respuestas con las de otro de tus compañeros.

2 Ahora considera el diseño de la Figura 2.20.

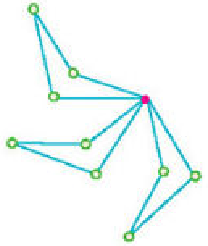


Figura 2.20

¿De cuál figura partirías? _______________. ¿Qué transformaciones debes emplear? ______________________________
Complementa el diseño. ¿Qué transformación utilizaste? ___________ ______________________. Compáralo con el elaborado por otro de tus compañeros.

Pareja

3 En pareja, uno de ustedes propone el inicio de un diseño y el otro lo finaliza. En el espacio que sigue, dibujen su diseño y expliquen cómo lo obtuvieron.

Integremos

1 La Figura 2.21, llamada *greca escalonada*, fue elegida como motivo para decorar la pared de una pirámide en México, según se muestra enseguida (Figura 2.22).

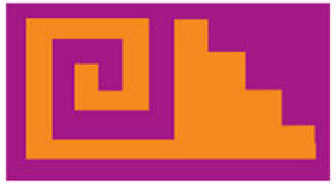


Figura 2.21

¿De cuál greca escalonada iniciarías? ______________
____

¿Qué transformaciones se usan en dicha pared?
____
____

Discútelo con tus compañeros y si llegan a un acuerdo, escríbelo.
____
____

Figura 2.22

2 Busca diseños geométricos en manteles, blusas, etc., y dibújalos en el espacio siguiente.

Para cada diseño, indica de qué figura se inicia y qué transformaciones se usan.

Apliquemos

1 Con la Figura 2.23 como inicial, construye un diseño. Utiliza la traslación, luego una rotación y finalmente una reflexión; tú debes elegir el centro de giro, la medida del ángulo y el eje.

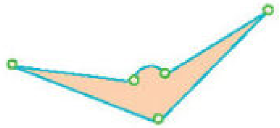


Figura 2.23

Glosario

Reflexión: es el traslado de todos los puntos de una figura a una posición equidistante del eje de simetría.

Muestra a tus compañeros el diseño que hiciste, pídeles que te expliquen cómo lo elaboraste y escribe esa explicación.
____
____

2 Dibuja en tu cuaderno el diseño que más te gustó de todos los construidos en el grupo y explica por qué.

Lección 4

Relaciones entre las áreas en el triángulo rectángulo

En esta lección aprenderás a aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Conocimientos previos

Los cuadrados de la cuadrícula de la Figura 2.24 tienen 1 cm de lado y los catetos (lados que forman el ángulo de 90 grados) del triángulo rectángulo miden 2 cm.

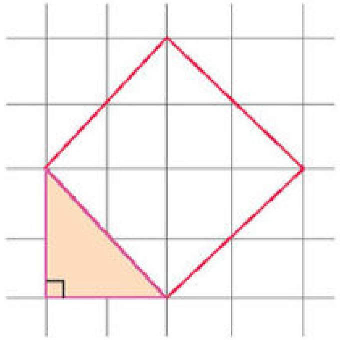


Figura 2.24

¿Por qué el cuadrilátero cuyo lado es la hipotenusa –lado frente al ángulo recto– es un cuadrado? ____________________

____

¿Cuánto mide el área de este cuadrado? __________. Explica al grupo cómo obtuviste tu respuesta.

____

Situación problemática

¿Qué relación tienen entre sí los cuadrados que se construyen sobre cada uno de los lados de todo triángulo rectángulo (que tiene un ángulo recto, es decir, de 90 grados)?

____

____

Comprendamos

1 En la cuadrícula de la Figura 2.25, cuyos cuadrados tienen 1 cm de lado, construye los cuadrados de los lados de los triángulos rectángulos que aparecen en ella y escribe lo que mide cada uno.

Individual

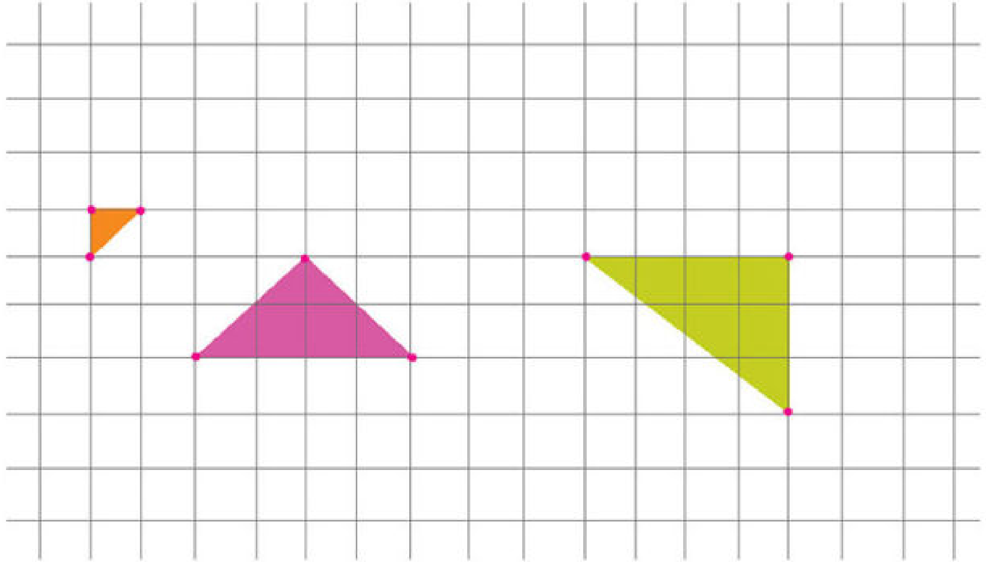


Figura 2.25

¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados de cada triángulo rectángulo? ____________________. Coméntalo con tus compañeros y escribe lo que responda la mayoría.

____

____

2 Con tu regla graduada, encuentra las longitudes de los lados de cada uno de los triángulos rectángulos que se presentan en la Figura 2.26.

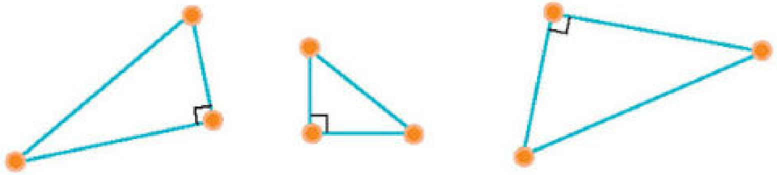


Figura 2.26

¿Son exactos o aproximados los valores hallados? __________. Compara tu respuesta con las de tus compañeros.

Sin construir los cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo, encuentra las áreas de dichos cuadrados. ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados de cada triángulo rectángulo?

____

____

Compara tu respuestas con las de tus compañeros y escribe lo sucedido.

____

____

3 Con base en las respuestas a las dos preguntas anteriores de este apartado, ¿cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo?

____

____

4 Ahora tracemos triángulos que no sean rectángulos, como los que aparecen en la Figura 2.7.

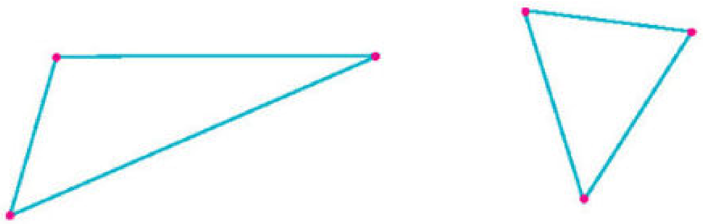


Figura 2.27

Calcula las áreas de los cuadrados de cada lado de los triángulos. La relación que escribiste en 3, ¿se cumple para los dos triángulos que no son rectángulos? __________.

¿Qué opinan de tu respuesta otros compañeros?

____

____

¿El grupo está de acuerdo con tu respuesta al caso de los triángulos no rectángulos? Describe lo ocurrido al respecto.

____

____

Integremos

Individual

1 Si el triángulo es rectángulo siempre tiene un lado mayor que se llama ________________ y los lados que forman el ángulo de 90 grados se denominan ____________. Estos nombres sólo se utilizan cuando el triángulo es rectángulo.

2 Pide a uno de tus compañeros que trace tres triángulos rectángulos y calcula las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de sus lados. Entre los dos, poniéndose de acuerdo, digan cuál es la relación entre las áreas para cada triángulo.

____

____

¿La relación es la misma para los tres triángulos rectángulos? __________. Escríbanla. ____

____

3 La conjetura para los triángulos rectángulos construidos hasta el momento es: las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo rectángulo cumplen con lo siguiente: ______________

____

4 La respuesta del inciso anterior, ¿se cumple para un triángulo que no es rectángulo? ____________. Explica tu respuesta al grupo.

Apliquemos

Individual

1 Calcula la medida que falta de los triángulos rectángulos de la Figura 2.28.

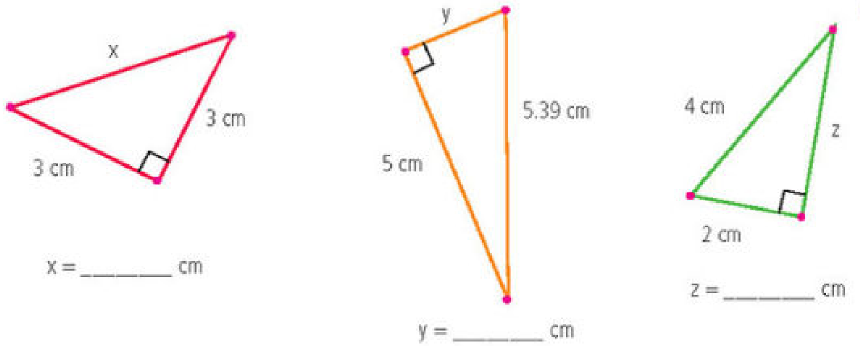


Figura 2.28.

2 Un rectángulo tiene 7 cm de largo y 3 cm de ancho, ¿cuánto mide la diagonal de dicho rectángulo? ____________. Haz un esquema y describe cómo obtuviste tu respuesta.

____

____

3 Una habitación con forma de prisma rectangular recto tiene 6 m de largo, 4 m de ancho y 5 m de altura. Calcula lo que mide la diagonal del prisma rectangular recto y explica al grupo cómo la obtuviste.

4 Dos postes verticales al piso, de 6 m y 4 m, están separados por una distancia de 12 m y sujetan por sus extremos superiores un cable tenso, calcula la longitud del cable y compara tu resultado con el obtenido por otro compañero.

Lección 5

La relación pitagórica

En esta lección aprenderás a aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Conocimientos previos

Dado un triángulo rectángulo como el de la Figura 2.29, es posible construir un cuadrado cuyo lado sea la suma de sus catetos.

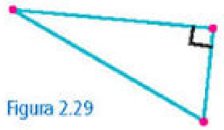


Figura 2.29

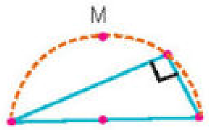
Con tu juego de geometría, construye a la derecha del triángulo un cuadrado cuyo lado mida la suma de los catetos.

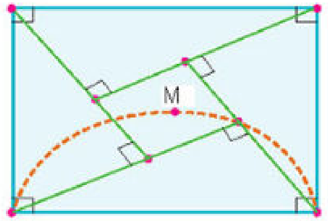
Situación problemática

Utilizando un paquete de *geometría dinámica* (pregúntale a tu profesor) realiza lo siguiente:

1. Traza un triángulo rectángulo inscrito en un semicírculo como aparece del lado izquierdo de la Figura 2.30.
2. Localiza el punto medio M sobre la semicircunferencia.
3. Gira el triángulo originalmente obtenido con rotaciones sucesivas de centro M y ángulos de 90 grados.
4. Con los triángulos que vas obteniendo construye la figura de la derecha.

Figura 2.30





5. Etiqueta las longitudes de los catetos y de la hipotenusa del triángulo rectángulo del cual partiste.
6. Expresa el área del cuadrado de la derecha de dos maneras diferentes.

____

____

7. Iguala las dos expresiones anteriores y obtendrás una sorpresa, escribe a continuación cuál es ésta.

____

____

Comprendamos

1. Ahora, con el mismo triángulo rectángulo del inciso 1, construye el cuadrado que se muestra en la Figura 2.31.

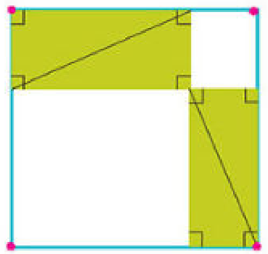


Figura 2.31

Describe al grupo cómo lo construiste y escríbelo.

____

____

Las dos figuras sin colorear que aparecen dentro del cuadrado son ______________. Justifica tu respuesta. ______________________

____

____

2. ¿Cómo son entre sí los cuadrados construidos en los incisos 1 y 2? ______________. Ambos cuadrados contienen cuatro triángulos, ¿cómo son entre sí? ________________. Compara tus respuestas con las de otro compañero.
3. De acuerdo con la respuesta del inciso anterior, ¿cómo son las partes sin colorear en los cuadrados de los incisos 1 y 2?

____

____

¿Qué opina el grupo de esta respuesta?

____

____

4 Si en el triángulo dado etiquetas las medidas de los catetos con x y y, y la medida de la hipotenusa con z, puedes simbolizar la respuesta que diste al inciso anterior. Escríbela ______________________________

Integremos

Individual

1 Considerando el triángulo rectángulo de la figura 2.30, de la página 90, las construcciones de los cuadrados elaborados en el apartado anterior nos llevan a concluir que:

____

____

Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

2 Si elaboramos todos los incisos del apartado anterior en el triángulo rectángulo de la Figura 2.32

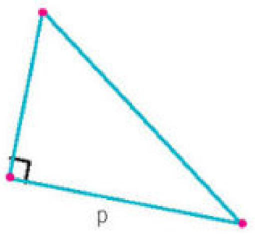


Figura 2.32

finalmente obtenemos que:

$$r^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

En dicha igualdad aparecen tres letras, de manera que si das valores particulares a dos de ellas puedes encontrar el valor de la tercera. Por ejemplo, si $p = 5$ y $q = 3$, al sustituir dichos valores en la igualdad anterior obtenemos: ______________, es decir, $r =$ _________

3 Escribe la relación pitagórica.

____

____

Compara tu respuesta con las de otros compañeros y, si llegan a un acuerdo, escríbelo.

____

____

Glosario

Relación pitagórica: es una característica de los triángulos rectángulos mediante la cual si conocemos las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo, podemos calcular la medida de la hipotenusa. Y si conocemos la medida de la hipotenusa y la de un cateto, podemos calcular la medida del otro cateto.

Apliquemos

Individual

1 Construye dos triángulos rectángulos más en la Figura 2.33.

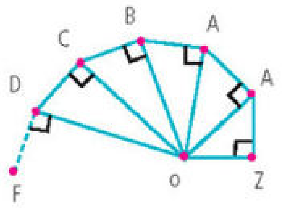


Figura 2.33

Si 1 cm = OZ = ZA = AB = BC = CD = DE = EF =..., ¿cuánto miden los segmentos OA, OB, OC, OD, OE, OF y OG? ____________. Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

2 Una persona camina desde A hasta B sobre la trayectoria marcada en el diagrama de la Figura 2.34.

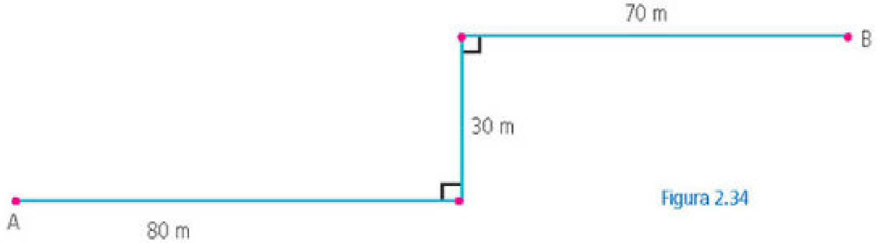


Figura 2.34

Calcula la distancia entre A y B: ____________________.
Describe cómo obtuviste la respuesta.

____

____

3 El área de un rectángulo es de 192 cm^2 y la medida de un lado es el triple de la medida del otro, ¿cuánto mide la diagonal de dicho rectángulo?

____

____

Discute el problema con tus compañeros y describe cómo lo resolvieron.

____

____

4 Construye en tu cuaderno triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo como se ilustra en la Figura 2.35. ¿Es válida la relación pitagórica para los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo rectángulo? ________. Discute tu respuesta con tus compañeros.

Escribe dicha relación pitagórica para la figura anterior.

____

____

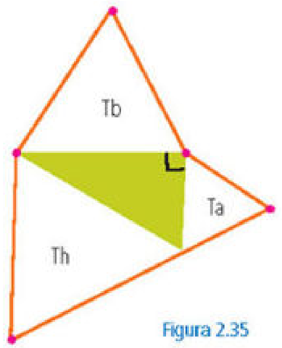


Figura 2.35

Lección 6

Eventos complementarios, mutuamente excluyentes y regla de la suma

En esta lección aprenderás a distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son mutuamente excluyentes. Determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia.

Los eventos complementarios y los eventos que se excluyen mutuamente son una vía para calcular la probabilidad de otros eventos compuestos, en particular la de que ocurra cualquiera de dos eventos dados mediante la regla de la suma.

Conocimientos previos

En cada inciso, indica el evento complementario correspondiente:

1. El Popocatépetl hace erupción: ______________________________
____
2. Por lo menos llegaron dos llamadas al conmutador a mediodía:
____
3. El evento seguro: ______________________________
____

Completa las siguientes afirmaciones:

1. La probabilidad del evento imposible es ______ y la del seguro es ______.
2. La probabilidad de un evento más la probabilidad de su evento complementario es ___. ¿Por qué? ______________________________.
3. Dos eventos A y B que no tienen posibilidades en común son ________
______________________________.
4. La probabilidad de que dos eventos que se excluyen mutuamente ocurran de forma conjunta es ______________________________.
5. La probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos mutuamente excluyentes es ______________________________
______________________________.

6. Se lanzan dos monedas. Indica dos eventos complementarios: ________
______________________________.
Menciona dos eventos mutuamente excluyentes:
____

Situación problemática

Pareja

¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de una tirada con un dado no cargado para conseguir un 6?

En pareja contesten las preguntas y sigan las instrucciones.

1. ¿A qué fenómeno aleatorio se refiere la pregunta del problema? ______
____
2. Describan el espacio muestra asociado a ese fenómeno. ____________
____
____
3. ¿Cuáles son los posibles resultados en una tirada con un dado ordinario?
____
4. Describan el evento de que a la segunda tirada consigas el 6. ________
____
5. ¿Cuáles son los números posibles de tiradas necesarias para obtener un 6?
____
6. Lancen un dado ordinario hasta que obtengan un 6. Registren en la Tabla 2.1 cada vez el número de tirada y el resultado.

Tirada	1ª	2ª										
Resultado												

Tabla 2.1

7. ¿Cuál es la probabilidad del evento E^1 de que a la primera tirada consigan un seis? ________ ¿Qué es más probable, que caiga un 6 en la primera tirada o que no lo obtengan? _______ ¿Por qué? ________________.
8. ¿Cuántas tiradas efectuaron hasta que obtuvieron 6? ____. Comparen su respuesta con las de sus compañeros de grupo.
9. Observen que "necesitar más de una tirada" para que caiga un 6 es lo mismo que ________________ en la primera tirada. Luego,

   P (más de una tirada para tener 6) = P (__________) = _____.

Observen que ante la dificultad de calcular la probabilidad de un evento compuesto por un número indefinido de posibilidades (cae 6 en la segunda tirada, o en la tercera, o en la cuarta, o en la quinta, o...), refiriéndote al evento complementario simple (no cae 6) en la primera tirada identificaron la probabilidad pedida.

La ocurrencia o no ocurrencia de un evento informa, respectivamente, acerca de la no ocurrencia u ocurrencia de su evento complementario.

10 Revisen sus respuestas a los incisos 4 y 7.

a ¿Cuál es la probabilidad del evento E_2 de que caiga el primer 6 en la segunda tirada? ______

b Describan el evento "cae el primer 6 en la primera tirada (E_1) o en la segunda (E_2)": ______

Observen que los eventos E_1 y E_2 no tienen posibilidades en común, porque no se puede obtener 6 por primera vez en dos diferentes tiradas, es decir, los eventos E_1 y E_2 se excluyen mutuamente, por lo que la probabilidad de que ocurra uno u otro es la suma de sus probabilidades.

Comprendamos

Pareja

De los 100 alumnos de una secundaria, 30 tienen curso de francés, 10 participan en la orquesta de la escuela y 5 están tanto en el curso de francés como en la orquesta. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ni lleve francés ni esté en la orquesta?

En pareja discutan cada inciso y acuerden las respuestas.

Organicen y analicen los datos del problema. Etiqueten las características de los alumnos a las que se refiere el problema:

F: cursa francés O: participa en la orquesta
Usen el superíndice c (^{c}) para "complemento".

1 ¿Cuál es el fenómeno aleatorio al que se refiere el problema?

______.

2 ¿Cuál es el espacio muestra al que se refiere la pregunta del problema?

______

3 Especifiquen en la Tabla 2.2 cada uno de los eventos siguientes:

F y O: ______	O^c: ______
F^c: ______	F^c y O: ______
F y O^c: ______	F^c y O^c: ______

Tabla 2.2

4 ¿A cuál evento se refiere la pregunta del problema? ______

5 Identifiquen las siguientes probabilidades:

P(F) = ______; P(O) = ______; P(F y O) = ______

6 Determinen las siguientes probabilidades:

P(F^c) = ______; P(O^c) = ______

En la Tabla 2.3, el espacio muestra se ha partido de tres formas: una con el evento F y su complemento F^c; otra con el evento O y su complemento O^c; y otra más con los cuatro eventos derivados de las dos primeras particiones.

		Espacio muestra	
		O	O^c
Espacio muestra	F	F y O	F y O^c
	F^c	F^c y O	F^c y O^c

Tabla 2.3

7 ¿Cómo son entre sí los eventos F y O y F^c y O? ______

8 ¿Cómo son entre sí los eventos F y O^c y F^c y O^c? ______

9 Anoten en la tabla la cantidad de alumnos que corresponde a cada uno de los eventos O, F, F y O.

10 Ya que el total de alumnos de la secundaria es 100, si 30 cursan francés, ¿cuántos no cursan francés? ____. Entonces, la cantidad de alumnos para F^c es ____. Anótenla en la tabla.

11 Si 10 alumnos están en la orquesta (O), entonces ____ no están en la orquesta (O^c). Anoten esta cantidad en la tabla, donde corresponde.

12 Observen en la tabla que el evento F se ha partido en los eventos F y O y F y O^c. Por lo tanto, las cantidades de alumnos que corresponden a estos dos eventos deben sumar la cantidad total de alumnos en F. ¿Cuántos alumnos corresponden a F y O^c? ______. Anoten esta cantidad en la tabla, en la celda de este evento.

13 Determinen la cantidad de alumnos que corresponde a F^c y O^c: ____.

14 Calculen la probabilidad de que un alumno de la secundaria seleccionado al azar no curse francés ni esté en la orquesta: ______.

Integremos

Individual

1 Una empresa recibe semanalmente pedidos de uno de sus clientes: incluyen el producto A 25% de veces, 40% el B y 15% los dos productos, A y B. Cuál es la probabilidad de que la semana próxima este cliente solicite:

a Cualquiera de los dos productos.

b El producto A y no el B.

c El producto A o no solicite el B.

Discute cada inciso con un compañero o compañera, sigue las instrucciones y responde las preguntas.

Organiza y analiza los datos del problema. Etiqueta los eventos por los productos que los pedidos incluyen; usa el superíndice c (^{c}) para "complemento".

2 Identifica los datos del problema: ______________________________
____.

3 Especifica los eventos en la Tabla 2.4:

A: ______________________	B: ______________________
A^c: ______________________	B^c ______________________
A y B: ____________________	

Tabla 2.4

4 Calcula las probabilidades $P(A^c)$ = _________; $P(B^c)$ = __________

5 Describe los eventos en la Tabla 2.5:

B o B^c: _______________	A o A^c: _______________
B y B^c: _______________	A y A^c: _______________

Tabla 2.5

6 En la Tabla 2.6, indica las probabilidades de los eventos del inciso anterior:

P(B o B^c) = _______________	P(A o A^c) = _______________
P(B y B^c) = _______________	P(A y A^c) = _______________

Tabla 2.6

7 El evento A está compuesto por su parte que es común al evento B (A y B) y por su parte que no es común a B (A y B^c). O sea que los eventos **A y B** y **A y B^c** parten el evento A.

Por tanto, el evento A ocurre si ocurre cualquiera de los eventos _______ o _______, uno u otro.

8 ¿Cómo son entre sí los eventos A y B y A y B^c? ____________________

¿Por qué? ____

9 ¿Cómo son entre sí los eventos A y B y A^c y B? _____________ ¿Por qué? ____

10 Entonces: P(A y B) + P(A y B^c) = ____; P(A y B) + P(A^c y B) = ________

En la Tabla 2.7, el espacio muestra se ha partido de tres formas: una con el evento A y su complemento; otra con el evento B y su complemento; y otra más con los cuatro eventos derivados de las dos particiones primeras.

	Tipo de porducto	Espacio muestra	
		B	B^c
Espacio muestra	A	A y B	A y B^c
	A^c	A^c y B	A^c y B^c

Tabla 2.7

Entonces:

Cualquier evento y su evento complementario descomponen su espacio muestra en dos partes.

El espacio muestra ocurre si ocurre cualquiera de los eventos:

A y B, A y B^c, A^c y B o A^c y B^c.

11 Observa en la tabla que el evento A o B, es decir, que ocurra sólo A (A y no B) o sólo B (B y no A) o los dos, A y B, tiene tres componentes: __________, __________, __________. ¿Cómo son entre sí esos componentes? ____________________. Por tanto,
P(A o B) = P (________) + P (________) + P(A y B) =
= [P(A) – P(A y B)] + [P(B) – P(A y B)] + P(A y B),

o sea,

P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B) .... Regla de la suma

Observa en la tabla que el evento A y B es común tanto a A como a B, por lo que al considerar el evento A o B tomamos en cuenta doblemente el evento A y B. Entonces, al calcular la probabilidad P(A o B) debemos restar una vez la probabilidad P(A y B).

Para dos eventos A, B cualesquiera, la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos (uno, el otro o los dos) es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de que ambos ocurran.

Identifica los eventos en los incisos del problema para calcular sus probabilidades.

1 Completa la Tabla 2.8. Anota tus respuestas a los incisos 1, 3 y 9 de la parte I donde corresponda.

2 El evento "cualquiera de los dos productos" del inciso a) del problema corresponde al evento de que se solicite uno, o el otro o los dos, o sea __________. Por tanto,

P (_________) = ______________________________ = _______

3 El evento del inciso b): "el producto A y no el B" corresponde al evento __________. Por lo tanto:

P(_________) = P(A) – P(_________) = _____

	B: incluye producto B P(B) = ______	B^c: __________ $P(B^c)$= _______	P(B) + $P(B^c)$
A: incluye producto A P(A) = ______	A y B: incluye productos A y B P(A y B) = ______	A y B^c: _________ P(A y B^c) = ______	P(A y B) + P(A y B^c)
A^c: ___________ $P(A^c)$ = ______	A^c y B: ________ P(A^c y B) = _____	A^c y B^c: ________ P(A^c y B^c) = _____	P(A^c y B) + P(A^c y B^c)
P(A) + $P(A^c)$ = ___	P(A y B) + P(A^c y B) _____	P(A y B^c) + P(A^c y B^c) _____	

Tabla 2.8

4 El evento del inciso c): "el producto A o no solicite el B" corresponde al evento ______. Por lo tanto:

P(_________) = P(A) – P(_________) = _____

Presenten sus respuestas al resto del grupo.

Apliquemos

Individual

Según el pronóstico meteorológico, la probabilidad de que llueva es 0.5; de que haga calor, 0.2; y de que llueva y haga calor, es 0.15. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva ni haga calor?

1 ¿A qué fenómeno aleatorio se refiere el problema? _____________

2 Etiqueta los eventos a los que se refiere el problema:
___________; ___________; ___________; ___________

3 Identifica los datos correspondientes a esos eventos en el enunciado del problema: _______; _______; _______; _______

4 Identifica y etiqueta los eventos complementarios de los eventos simples en el enunciado: _________________; ________________

5 Ubica los eventos simples y sus complementarios respectivos en la tabla 2.9 para partir el espacio muestra.

6 Completa la tabla 2.9 con los cuatro eventos compuestos en el recuadro.

		Espacio muestra	
Espacio muestra			

Tabla 2.9

7 Calcula las probabilidades de los eventos complementarios. Anótalas en la tabla, en las celdas correspondientes.

8 Calcula las probabilidades de los eventos que parten los eventos simples.

9 ¿Cuál es el evento al que se refiere la pregunta del problema? _____.

10 La probabilidad de que no llueva ni haga calor es _______.

Mediante una encuesta se determinó la probabilidad de que un cierto número de automóviles formen una línea de espera en una bomba particular de una gasolinera, la que se muestra en la Tabla 2.10:

Número de automóviles en la fila	0	1	2	3 o más
Probabilidad	0.08	0.16	0.30	0.46

Tabla 2.10

Calcula la probabilidad de que en la fila haya:

a Cuando más un automóvil.

______

b A lo más dos automóviles.

______

c Por lo menos un automóvil.

______

d Al menos dos automóviles.

______

1 En la Tabla 2.11, etiqueta los eventos de los que te dan datos en el enunciado del problema como sigue e indica sus probabilidades:

Tabla 2.11

A_0: hay 0 automóviles en la fila	$P(A_0)$ = ______
A_1: ______,	$P(A_1)$ = ______
A_2: ______,	$P(A_2)$ = ______
$A_{3\ o\ más}$: ______,	$P(A_{3\ o\ más})$ = ______

2 ¿Cómo son entre sí los eventos A_0, A_1, A_2, A_3 o más? ______. ¿Por qué? ______

3 En el inciso a), que en la fila haya "cuando más un automóvil"; es lo mismo que ______ o ______, es decir, A_0 o A_1. Entonces,

P (A_0 o A_1) = ______ = ______ + ______ = ______

4 En el inciso b), que haya en la fila "a lo más dos automóviles"; es lo mismo que haya ______, o sea ______. Entonces,

P (______) = ______

5 En el inciso c), que haya "por lo menos un automóvil", significa que hay o uno, o dos, o tres o más, es decir, ______

Entonces, P (______) = ______

6 En el inciso d), que haya "al menos dos automóviles", es igual a que haya dos o más, o sea, dos o tres o más; es decir, ______

Luego, P (______) = ______

Se lanzan dos dados legales. Calcula la probabilidad de que:

a La suma de las caras sea cuando más 5 o aparezca sólo un número impar.

b La suma de las caras sea 5 y no aparezca un número impar.

1 ¿A qué fenómeno aleatorio se refiere este problema? ______

2 Anota en tu cuaderno el espacio muestra correspondiente.

3 ¿Qué posibilidades del espacio muestra corresponden al evento "cuando más la suma es 5"? ______. ¿Cuál es la probabilidad de este evento? ______

4 ¿Qué posibilidades del espacio muestra corresponden al evento "aparece sólo un número impar"? ______. ¿Cuál es su probabilidad? ______

5 Calcula la probabilidad que pide el inciso a): ______

6 ¿Cómo son entre sí los eventos del inciso b)? ______ ¿Por qué? ______

Calcula la probabilidad de su conjunción: ______

Evaluación

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, al terminar muéstralos a tu profesor para su evaluación.

1. El área de un triángulo es de 42 m², encuentra la base y la altura, si la altura es mayor en 5 m que la medida de la base.

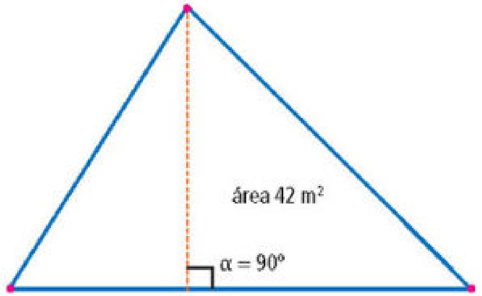


Figura 2.36

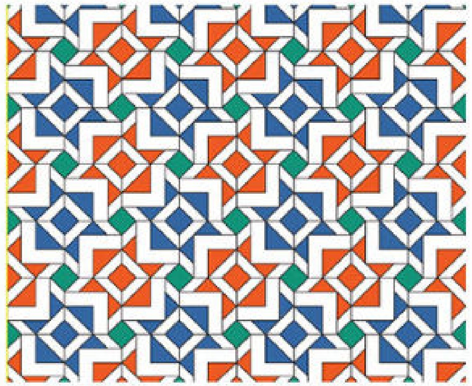
Respuesta: ____

2. Lee con atención y resuelve lo que se te pide.

Transformaciones geométricas

Ejemplos de diferentes transformaciones geométricas se pueden encontrar en los trabajos de M. C. Escher (1898-1972), artista holandés reconocido por sus grabados en madera, xilografías y litografías que tratan sobre figuras imposibles, teselados y mundos imaginarios.

a Identifica y argumenta el tipo de transformación geométrica en las siguientes imágenes inspiradas en el trabajo de Escher.



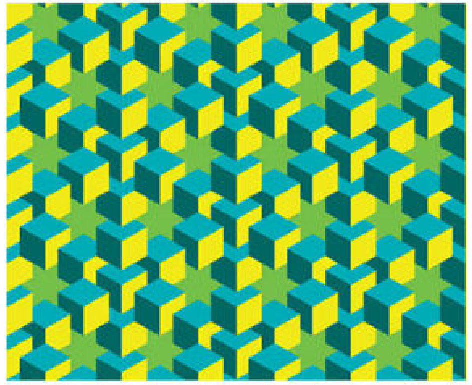


Figura 2.37

b Identifica los casos en que hubo una rotación del rectángulo, anota cuál es el centro de rotación y cuánto vale el ángulo correspondiente.

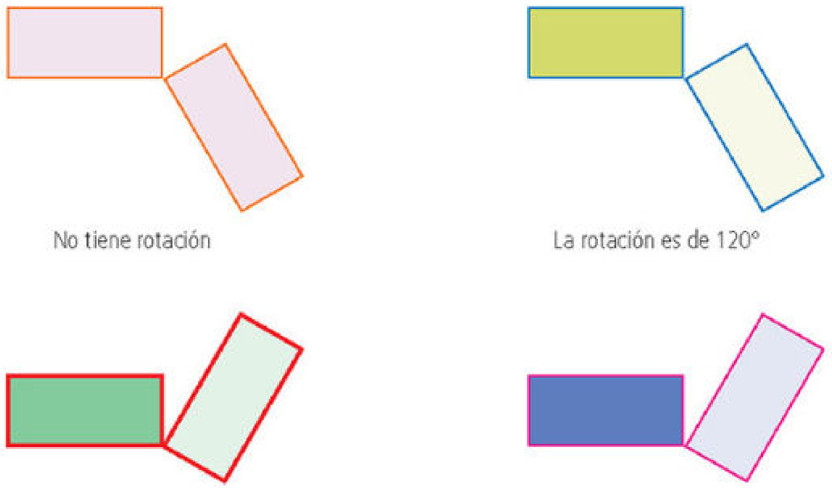


Figura 2.38

3. Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm, respectivamente. ¿Cuánto miden sus lados? ______________. Describe el procedimiento que seguiste para obtener la respuesta.

4. En la figura siguiente, ¿qué relación se cumple entre las áreas de los semicírculos construidos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC?

Explica tu respuesta.

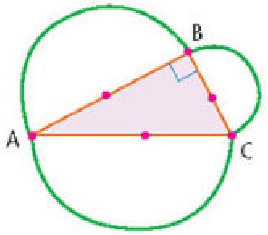
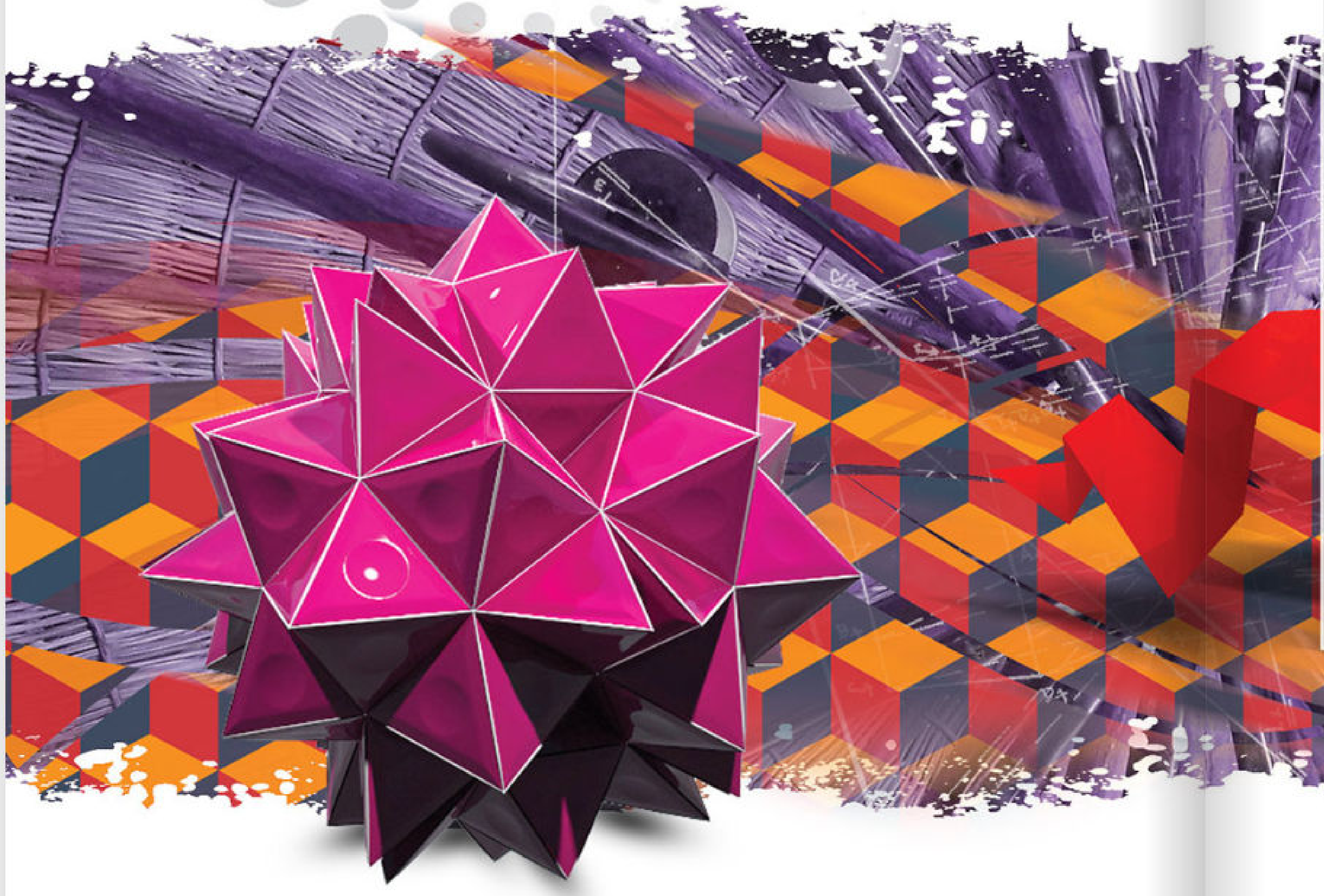


Figura 2.39

Bloque III

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones	1	14	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas	2	15	
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales	3	16	
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	4	17	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos	5	18	
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera	6	19	
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)	7	20	

Lección 1

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas

En esta lección aprenderás a utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.

Conocimientos previos

1 Con una lámina cuadrada de 120 cm se construirá una caja sin tapa, cortando en cada esquina de la lámina cuadrados congruentes, como se ilustra en la Figura 3.1.

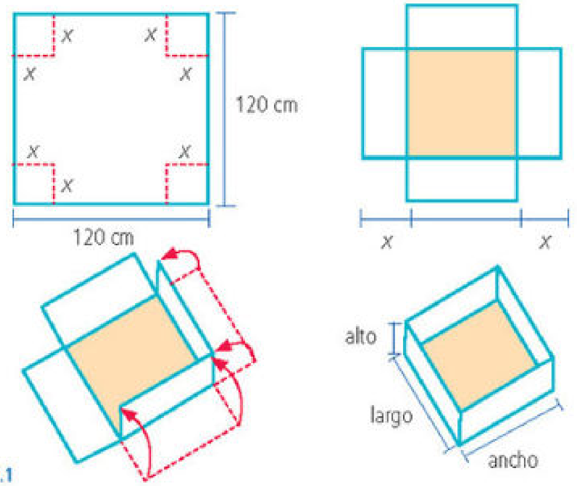


Figura 3.1

a ¿Qué medida debe tener el lado x (en cm) del cuadro que se corta en cada esquina para que el volumen de la caja sea el mayor posible? Para empezar, observa en la figura que la caja construida es un paralelepípedo y recuerda que su volumen se obtiene de la siguiente manera:

Volumen de la caja = largo ancho alto

Ahora usa los valores y letras de la última de las figuras y calcula:
Largo = $120 - 2x$
Ancho = ______
Alto = _______
Que al sustituirse dan:

Volumen de la caja = $(120\ \ 2x)(120 - 2x)(x)$ = (______)^2 (_____)

b La expresión obtenida dice que el volumen de la caja depende únicamente del valor dado a x. Cada valor dado a x es un valor con el cual puede construirse una caja (como se ilustra en la figura).

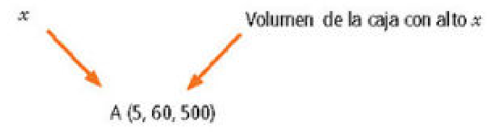
Verifica que para valores diferentes dados a x, el volumen de la caja tiene distintos valores (el volumen de la caja varía al cambiar x). Si $x = 5$, el volumen de la caja es igual a ________________

2 Efectúa los cálculos correspondientes y completa la tabla siguiente. Observarás que si la x cambia, el volumen de la caja también lo hace.

a Desarrolla una versión geométrica usando los datos de la Tabla 3.1.

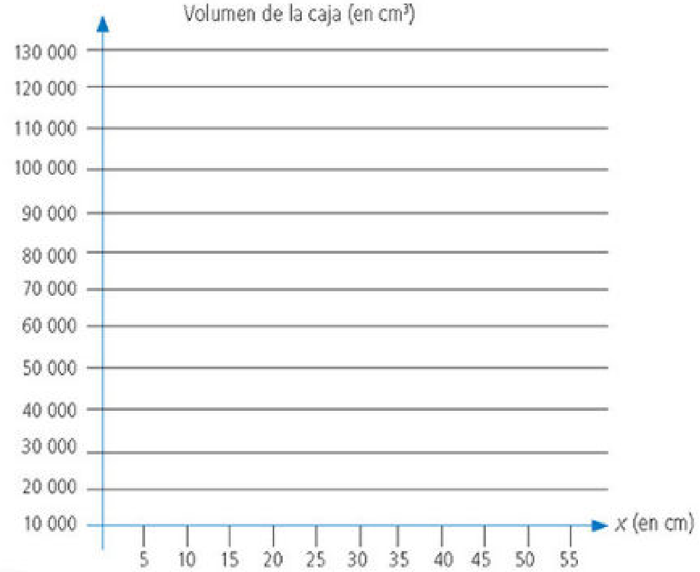
x (en cm)	$120 - 2x$	$(120 - 2x)^2$	Volumen de la caja con alto (en cm³) $V = (120 - 2x)^2 (x)$
5			
10			
15			
20			
25			
30			
35			
40			
45			
50			
55			

Tabla 3.1



b (10, ______)
c (15, ______)
d (20, ______)
e (25, ______)
f (30, ______)
g (35, ______)
h (40, ______)
i (45, ______)
j (50, ______)
k (55, ______)

b) Localiza cada uno de estos puntos en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas (Gráfica 3.1):



Gráfica 3.1

Compara la gráfica que hiciste con las de tus compañeros.

c) Esta curva se llama curva de variación del volumen respecto del alto de x.

¿Cuál de los 11 puntos A, B, C tiene la segunda coordenada mayor; es decir, para cuál de ellos el volumen de la caja es más grande?

____

d) Entre todos encuentren cuál es el volumen máximo de la caja:

____

Situación problemática

Pareja

Lean el siguiente problema y elijan la ecuación o ecuaciones con que puede resolverse.

El área de un terreno rectangular es de 144 m^2 y el frente mide 18 m más que el fondo. ¿Cuántos metros mide de fondo y de frente? Escriban la ecuación que les permita resolver el problema. Argumenten su respuesta ________________

____

Comparen sus ecuaciones con las de otros equipos, lleguen a una conclusión grupal y analicen si es posible resolver la ecuación mediante una tabla como en el ejercicio anterior.

Comprendamos

Pareja

La expresión cuadrática en una ecuación de la forma $x^2 + 18x - 144 = 0$ tiene un término constante y coeficientes tanto en x^2 como en x. Es decir, es una expresión cuadrática "completa" y no puede resolverse como las vistas anteriormente. La forma general de expresar una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx - c = 0$$

La siguiente es la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado. Con ella se calculan las dos soluciones de una ecuación de este tipo.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Comenten en grupo por qué se pueden obtener dos soluciones.

1. Escriban las siguientes ecuaciones en su cuaderno; indiquen el valor de a, b y de la constante c:

   a) $5x^2 + 13x - 144 = 0$
   b) $x^2 + 18x - 144 = 0$
   c) $6x^2 + 10x - 56 = 0$
   d) $6x^2 + 28x - 30 = 0$
   e) $4x^2 + 6x - 28 = 0$

2. Ralicen lo siguiente:

   a) Consideren la ecuación:

   $$x^2 + 18x - 144 = 0$$

   Observen que a = ______, b = ______ y c = _______.

   b) Sustituyan los valores de a, b, y c en la fórmula general. Resuelvan las operaciones en su cuaderno (pueden usar una calculadora). Las soluciones son:

   x_1 = __________; x_2 = __________

   c) Comprueben ambas soluciones en la ecuación original. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

3 Resuelvan las siguientes ecuaciones con la fórmula general.

a $x^2 - 5x + 6 = 0$
b $5x^2 - 8x + 3 = 0$
c $6x^2 + 7x - 20 = 0$
d $x^2 + 19x + 84 = 0$
e $3x^2 + 5x + 2 = 0$
f $4x^2 - 6x - 4 = 0$

Integremos

Pareja

1 Resuelvan en su cuaderno la siguiente ecuación con la fórmula general:

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

a ¿Cuánto vale $b^2 - 4ac$? ____________________
b Factoricen la ecuación: ____________________
c ¿Qué tipo de expresión es $x^2 - 12x + 36$? ____________________

d ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________________

2 Resuelvan en su cuaderno la siguiente ecuación con la fórmula general:

$$x^2 + 11x - 30 = 0$$

a ¿Cuánto vale $b^2 - 4ac$? ____________________
b Expliquen por qué no es posible factorizar la expresión $x^2 + 11x - 30$.

c ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ____________________

La cantidad $b^2 - 4ac$ se llama discriminante, y nos posibilita conocer cómo serán las soluciones de una ecuación de segundo grado.

a Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.
b Si $b^2 - 4^ac = 0$, la ecuación tiene una solución. En este caso la expresión $ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.
c Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones porque no hay raíces cuadradas de números negativos.

Apliquemos

1 En pareja, resuelvan en su cuaderno las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general:

Pareja

a $6x^2 + 10x - 56 = 0$
b $6x^2 - 28x + 30 = 0$
c $3x^2 + x - 56 = 14$
d $35x^2 + 24x = 27$
e $3x^2 - 8x = 16$
f $4x^2 + 6x - 28 = 0$
g $9x^2 + 126x + 441 = 0$
h $x^2 - 10x + 26 = 0$
i $8x^2 + 13x + 6 = 0$

2 Transformen las siguientes ecuaciones a la forma $ax^2 + bx + c = 0$

a $v(8v - 5) = 0$
b $\left(\frac{4}{9}m + 5\right)m = 0$
c $(12 - x)\,2x = 0$

3 Veamos un problema similar al que se trabajó en el bloque I.

A la orilla de un río se quiere instalar una cerca de 180 m de longitud, como se muestra en la Figura 3.2.

Figura 3.2

Si x y y son las longitudes de los lados de la cerca y se miden en metros, entonces la longitud ésta se representa con la expresión:

____

¿Cuál es el área máxima encerrada por la cerca? Para responder esta pregunta pueden ayudarse de una tabla o gráfica. Desarrollen los cálculos en su cuaderno.

Lección 2

Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

En esta lección aprenderás a determinar los criterios de semejanza de triángulos, a aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos y a aplicarla en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.

Conocimientos previos

Traza dos diagonales en el pentágono regular de la Figura 3.3.

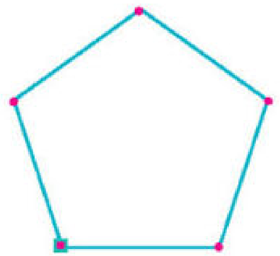


Figura 3.3

¿Cómo justificas que tienen la misma medida sin usar tu regla graduada? Discútelo con un compañero y escribe el procedimiento que seguirían para responder la pregunta.

____

____

Los segmentos AB y CD son paralelos y tienen distinto tamaño. Traza rectas punteadas que pasen por los extremos de uno y otro; etiqueta con O el punto de intersección de las rectas punteadas como se ilustra en la Figura 3.4.

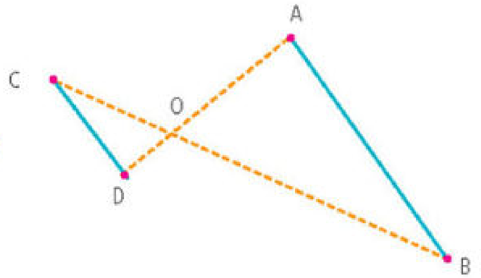


Figura 3.4

¿Cómo son los triángulos ODC y OAB? ______________. Compara tu respuesta con las de otros compañeros y escribe si hubo coincidencia en la justificación de dicha respuesta.

____

____

Situación problemática

Individual

Una artesanía cultivada en nuestro país es la elaboración del *papel picado* como aparece en la Figura 3.5. Observa las distintas hojas de colores, elige una de ellas y:

1. Remarca de color azul las figuras congruentes que contiene.
2. Colorea de color verde otras figuras congruentes diferentes a las primeras.
3. Traza con color naranja otras figuras congruentes diferentes a las segundas.

Comparte con tus compañeros tus respuestas y arguméntalas; discutan sus similitudes y diferencias, lleguen a un acuerdo de por qué son congruentes las figuras.

Figura 3.5

Comprendamos

Individual

1. Traza en tu cuaderno un triángulo y una paralela a uno de sus lados como se muestra en la Figura 3.6.

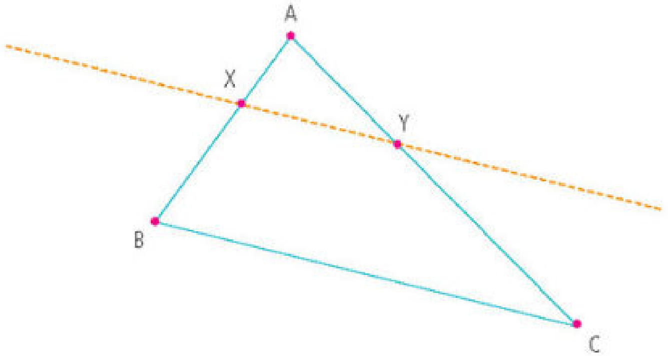


Figura 3.6

¿Son semejantes los triángulos ABC y AXY? ______ Explica tu respuesta.

____

____

Compara tu respuesta y explicación con las de otros compañeros.

2. En el triángulo ABC se traza la bisectriz (línea punteada) al ángulo en el vértice B; utilizando dicha bisectriz como eje de simetría para el triángulo ABC, se obtiene el triángulo $A'BC'$ que se muestra en la Figura 3.7.

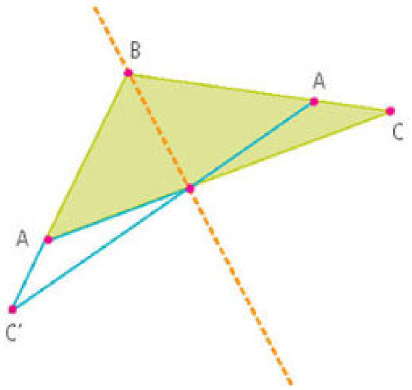


Figura 3.7

¿Son congruentes los triángulos ABC y $A´BC´$? _______. Si la respuesta es afirmativa, describe el criterio de congruencia utilizado.

____

____

3 En la Figura 3.8 se muestra una reja. La separación entre los barrotes es la misma.

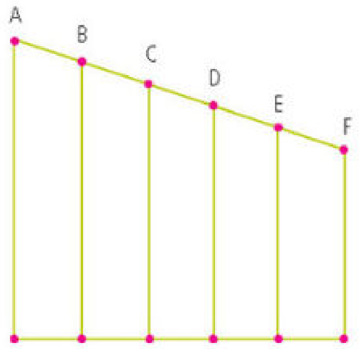


Figura 3.8

¿Cómo son entre sí AB y BC? ________. ¿Por qué? ________________

____

¿Cómo son entre sí AB y CD? ________. ¿Por qué? ________________

____

¿Cómo son entre sí AB y DE? ________. ¿Por qué? ________________

____

¿Cómo son entre sí AB y EF? ________. ¿Por qué? ________________

____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y describe sus justificaciones en cada caso.

____

____

4 Al trazar la altura del vértice opuesto a la hipotenusa en cualquier triángulo rectángulo, éste se divide en dos triángulos, como se muestra en la Figura 3.9.

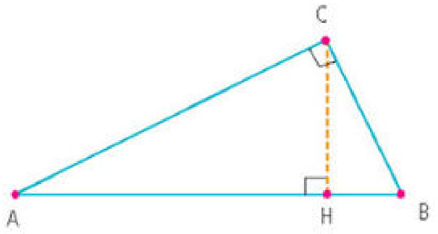


Figura 3.9

¿Cómo son entre sí los triángulos AHC y BCH? ________________.
Justifica tu respuesta.____

¿Cómo son entre sí los triángulos AHC y ABC? ________________.
Justifica tu respuesta.____

¿Cómo son entre sí los triángulos BCH y ABC? ________________.
Justifica tu respuesta.____

Integremos

Pareja

1 En pareja discutan lo siguiente: ¿la congruencia podría considerarse como un caso particular de semejanza? __________. Describan las consideraciones utilizadas para responder la pregunta.

____

____

2 Enuncien un criterio que garantice la semejanza de dos triángulos.

____

____

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

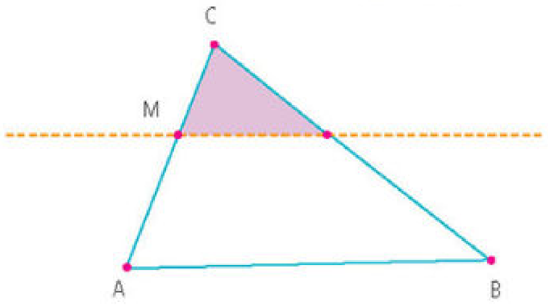
3 Si en el apartado "Situación problemática" contestaron que los triángulos de la cuadrícula **no** son semejantes, están equivocados. Por tanto, ahora expliquen por qué son semejantes.

____

____

____

Figura 3.10



4 En el triángulo ABC en la Figura 3.10, ¿dónde ubicar el punto M sobre uno de sus lados para que al trazar la paralela, por dicho punto, a otro de los lados se cumpla que el área del triángulo sombreado sea la mitad del área del triángulo ABC?

Describan cómo encontraron la ubicación de M.

____

____

Apliquemos

Individual

1 En tu curso de Física aprendiste que el movimiento de un cuerpo sobre una recta se llama **uniforme** si la velocidad es constante, esto es, si se recorren distancias iguales en tiempos iguales. En la Figura 3.11 dos personas salen al mismo tiempo del punto A: una sobre el segmento AY hacia Y y la otra sobre el segmento AZ hacia Z, ambas con velocidad constante.

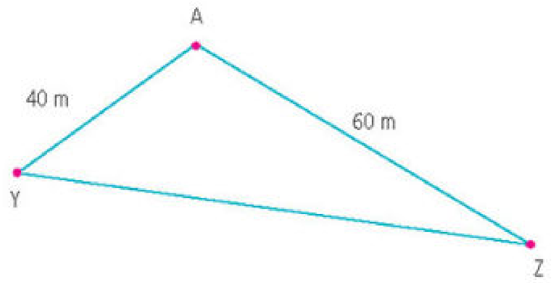


Figura 3.11

¿Cuál debe ser la relación entre sus velocidades si se quiere que ambas lleguen a Y y Z al mismo tiempo? ______________________. Justifica tu respuesta.

____

____

2 Supongamos que la velocidad de la persona que va de A hacia Y es de 8 m/s, ¿cuál será la velocidad de la que va de A hacia Z para que las dos lleguen al mismo tiempo a Y y a Z? ____________.
Compara con las respuestas de otros compañeros.

3 La Figura 3.12 es una representación esquemática que Eratóstenes usó para determinar el tamaño de la Tierra en el siglo III a. C.

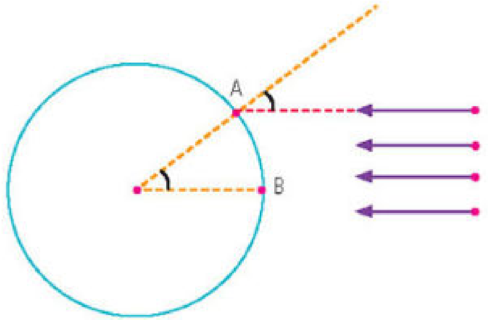


Figura 3.12

Midió el ángulo señalado en A y el centro de la circunferencia: le asignó 7.5 grados aproximadamente y para la distancia sobre la circunferencia de B hacia A obtuvo 5 250 estadios (1 estadio equivale a alrededor de 157.5 m). Con los datos anteriores y la información que consigas, explica al grupo cómo obtuvo Eratóstenes una aproximación del tamaño de nuestro planeta.

Lección 3

Teorema de Tales

En esta lección aprenderás a determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos y a aplicarlo en diversos problemas geométricos.

Conocimientos previos

1 Traza las alturas correspondientes a las bases señaladas en los triángulos que se presentan en la Figura 3.13.

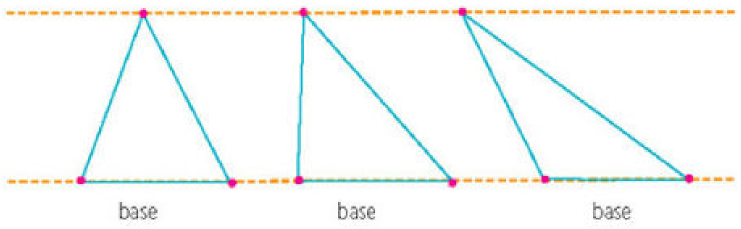


Figura 3.13

Las rectas punteadas son paralelas, ¿cómo son entre sí las alturas trazadas?

____

____

Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

2 Traza la altura común a los triángulos de la Figura 3.14.

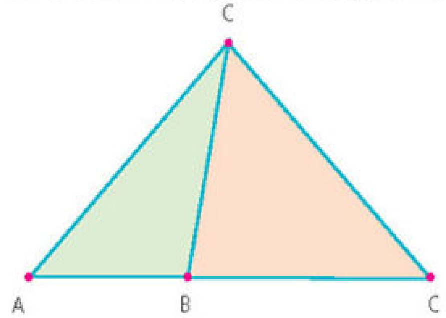


Figura 3.14

Expresa el área de cada triángulo utilizando la altura común.

____

____

3 Con tu juego de geometría, divide el segmento AB de la figura 3.15 en cinco partes iguales.

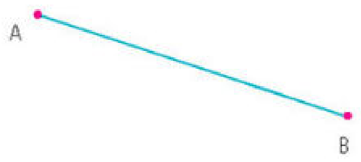


Figura 3.15

Describe cómo lo hiciste.

____

____

Compara con lo elaborado por tus compañeros.

Situación problemática

Grupo

Anoten en la tabla 3.2 sus nombres y estaturas; después párense en el patio de la escuela donde les dé el sol y midan sus sombras, regístrenlo de igual manera.

Tabla 3.2

Nombre	Estatura	Sombra

Comenten con otros equipos ¿cómo son las estaturas de ustedes con respecto a las medidas de sus sombras?

____

____

Describan brevemente cómo obtuvieron las medidas de la sombra y generalicen la respuesta que obtuvieron.

____

____

Comprendamos

Individual

1 En el triángulo de la Figura 3.16 se trazó con una línea punteada la paralela a uno de sus lados.

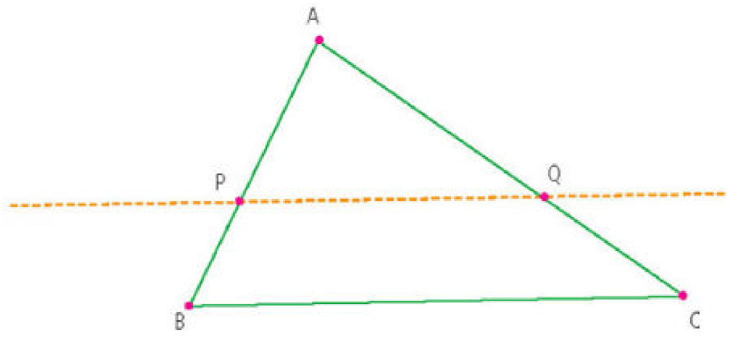


Figura 3.16

a) Traza el segmento BQ; después traza la altura común a los triángulos PQA y BQP y expresa sus áreas.

____

____

b) ¿Qué obtienes al dividir dichas áreas? ______________

c) Ahora traza el segmento PC y la altura común a los triángulos QAP y CQP, y expresa sus áreas.

____

____

d) Si divides dichas áreas obtienes: ______________

e) Ya que las áreas de los triángulos BQP y CQP son ____________, ¿cómo son entre sí los cocientes de las áreas que obtuviste en los incisos b y d? __________. Por lo tanto, al igualar los segundos miembros, obtienes ______________________. Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

2 Ahora, si la paralela punteada no interseca los lados sino las prolongaciones de sus lados, como se ilustra en la Figura 3.17, la línea punteada ST es paralela al lado BC del triángulo ABC.

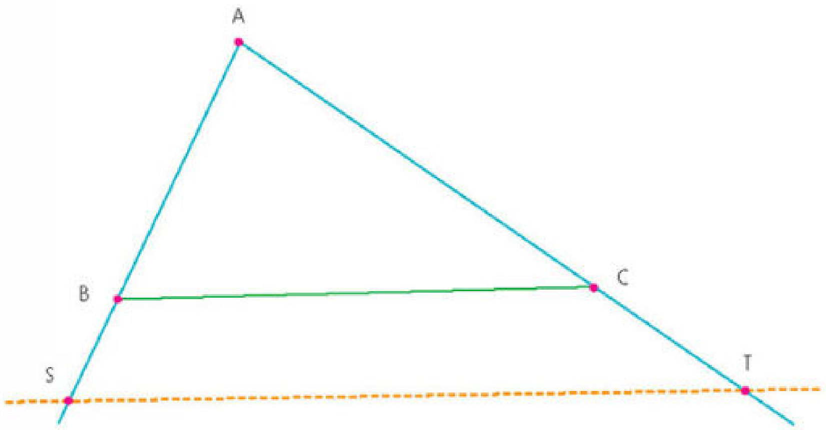


Figura 3.17

Si trazas el segmento SC y sigues el proceso del ejercicio anterior y luego trazas el segmento BT, al continuar dicho proceso, ¿a qué conclusión llegarías? ______________________________.
Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

3 En resumen: al trazar una paralela a uno de los lados de un triángulo dado, ésta interseca los otros dos lados o las prolongaciones de esos otros dos lados, ¿qué se cumple? ______________________________
______________________________.
Discútelo con tus compañeros del grupo.

Integremos

Individual

1 Si las paralelas están a uno y otro lado del vértice C como aparece en la Figura 3.18 a en trazo punteado la paralela QP al lado AB. Traza los segmentos AQ y BP para formar los triángulos ACQ y BPC, cuyas áreas son entre sí:
____
____

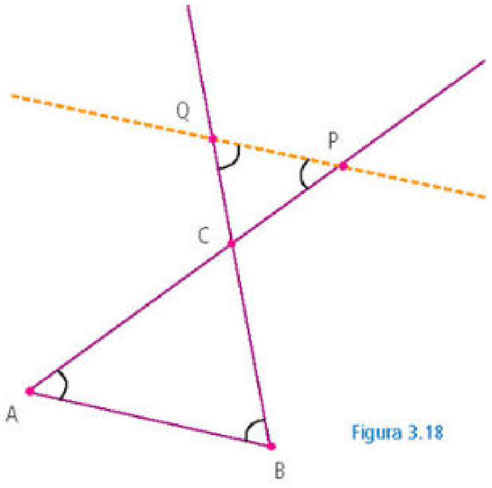


Figura 3.18

Justifica tu respuesta.
____
____

2 Ahora traza la altura común de los triángulos ACQ y CPQ de la misma figura que aparece en el inciso 1 (Figura 3.19).
Expresa el área ACQ = __________ y el área CPQ = __________
Al dividir las áreas anteriores, obtienes:

(Área ACQ)/(Área CPQ) = __________

Traza la altura común a los triángulos BPC y CPQ para expresar:

(Área BPC)/(Área CPQ) = __________

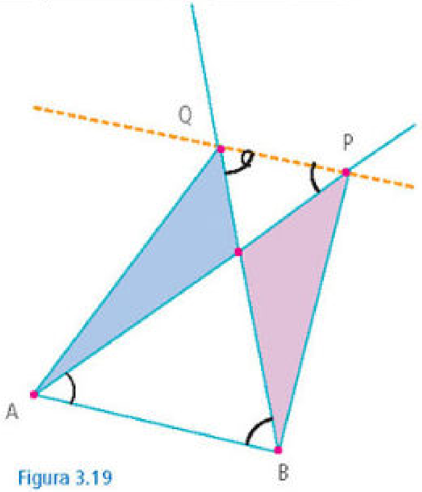


Figura 3.19

Como los primeros miembros de las dos últimas igualdades son iguales, iguala los segundos miembros para obtener: ______________________.
Los triángulos ABC y PQC son: ______________________

3 En dos triángulos semejantes, los lados que se oponen al mismo ángulo en ambos se llaman lados homólogos. En los triángulos de la figura anterior (ABC y PQC), el lado homólogo de AB es _______, el lado homólogo de BC es _______ y, finalmente, el lado homólogo de CA es _______. ¿Cómo son los cocientes de lados homólogos en dos triángulos semejantes? ______________. Comenta tu respuesta con el grupo.

4 En la Figura 3.20, ST es paralela a BC.

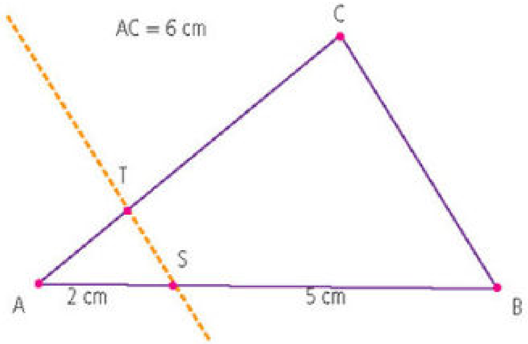


Figura 3.20

Calcula las medidas de AT y TC, y describe cómo las obtuviste.
____
____

Compáralas con las de otros compañeros.

Apliquemos

Individual

1 Calcula la medida de x del techo de dos aguas que se muestra en la Figura 3.21.

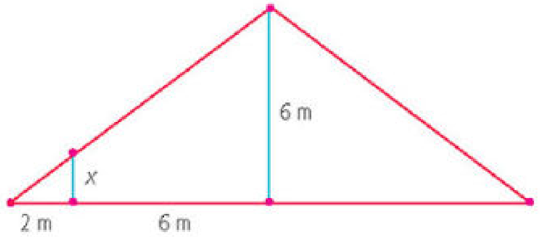


Figura 3.21

Describe cómo la obtuviste.

Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

2 Construye un triángulo y, desde el punto medio de uno de sus lados, traza paralelas a los otros dos lados; etiqueta los puntos donde dichas paralelas intersecan esos otros dos lados. ¿Los puntos etiquetados son también puntos medios? _______. Justifica tu respuesta.

3 En el triángulo ABC de la Figura 3.22, los lados AB y AC están divididos en cinco partes iguales cada uno.

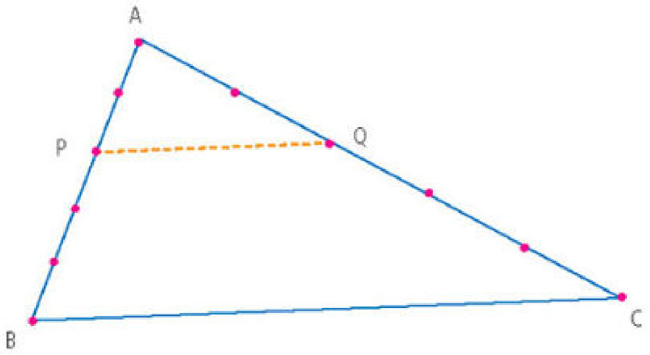


Figura 3.22

El punto P divide AB en la razón AP/PB = ______. El punto Q también divide el lado AC en la razón AQ/QC = ________ ¿Cómo son estas dos razones? ______________. ¿El segmento PQ es paralelo al lado BC? ________. Justifica tu respuesta.

Compara tu respuesta y justificación con las de tus compañeros.

4 Escribe la generalización del inciso anterior.

Discútela con tus compañeros.

Homotecia

4 Lección

En esta lección aprenderás a determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que -1, a determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura y a comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.

Conocimientos previos

En el triángulo acutángulo ABC, traza las alturas desde los vértices A y B a sus lados opuestos, y llama a sus pies P y Q, respectivamente, como se ilustra en la Figura 3.23.

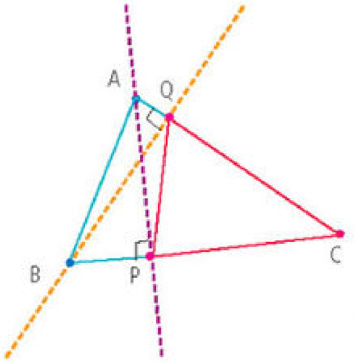


Figura 3.23

Los triángulos ABC y PQC, ¿son semejantes? _______. Justifica tu respuesta.

Compara tu respuesta y justificación con las de otros compañeros.

Situación problemática

Existen diferentes mecanismos para *ampliar* o *reducir* objetos, por ejemplo, la cámara fotográfica, en la Figura 3.24 observa el cuadro de la izquierda que es de tamaño real y el de la derecha es la fotografía que se obtuvo, ¿qué características al tomar una fotografía no cambian entre el objeto y como aparece en la fotografía?

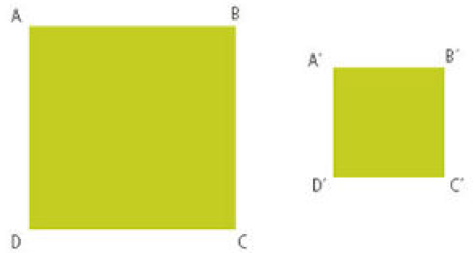


Figura 3.24

Comprendamos

Individual

1 Considera dos segmentos paralelos de distinto tamaño como los de la Figura 3.25.

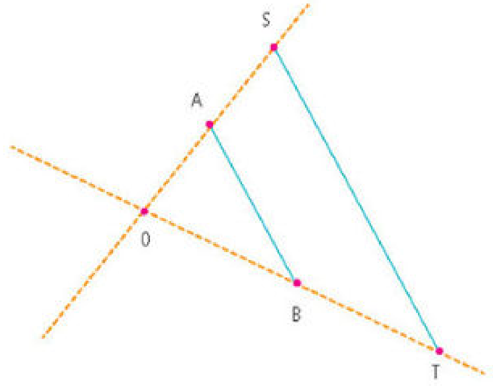


Figura 3.25

Los segmentos AB y ST son paralelos y de tamaño diferente, lo que hace que al trazar las rectas SA y TB se intersequen en el punto O. ¿Cómo son entre sí los cocientes OB/OT y OA/OS? ______________. Justifica tu respuesta.

____

____

Llamemos k dichos cocientes, esto es: k = ___/___ = ___/___; al despejar los dividendos de dichos cocientes resulta: OB = k* ____ y OA = k* _____. ¿Cómo son entre sí los triángulos OAB y OST? ________________. Justifica tu respuesta. ______________________________

____

2 Ahora observa la situación contraria: esto es, un segmento y un punto O fuera del segmento, como aparece en la Figura 3.26.

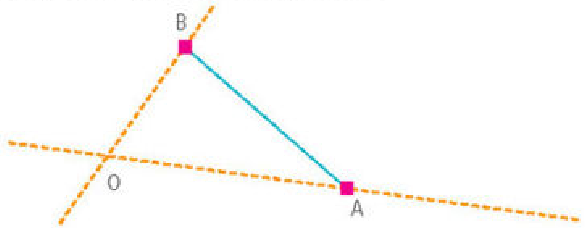


Figura 3.26

Encuentra los puntos A´ y B´ sobre cada una de las rectas punteadas de manera que...

$$OA´ = 2(OA) \text{ y } OB´ = 2(OB)$$

¿Cómo es el segmento A´B´ respecto al segmento AB? ______________. Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

3 En tu cuaderno traza un triángulo ABC y un punto O fuera de dicho triángulo, como se ilustra en la Figura 3.27.

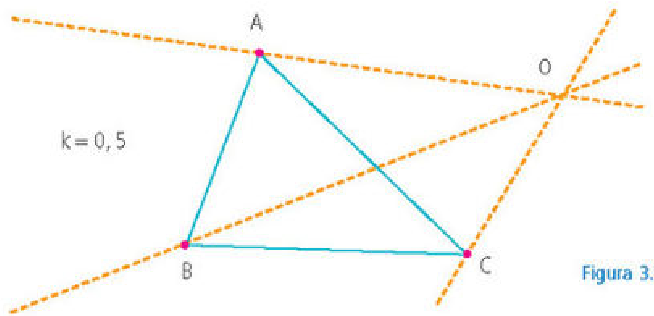


Figura 3.27

Localiza el punto P sobre OA, tal que OP = k x OA; luego encuentra sobre OB un punto Q, tal que OQ = k* OB; y, finalmente, localiza un punto R sobre OC, tal que OR = k*OC. Recuerda que k = 0.5. Al unir por medio de segmentos los puntos P y Q, Q y R, y R y P determinas un triángulo.

¿Qué relación existe entre PQ y AB y cómo son entre sí?__________. Contesta en tu cuaderno las preguntas anteriores tanto para el caso de QR y BC como para los lados RP y CA. Compara tus respuestas con las de otros compañeros.
Lo elaborado en este caso para el triángulo ABC, a partir de O y constante k = 0.5, se llama homotecia. Además, los triángulos ABC y PQR, que son ________________, se conocen como *triángulos homotéticos*.

Glosario

Homotecia: es la transformación geométrica que hace corresponder a un punto X otro X', alineado con X y con otro punto fijo Y, tal que $\frac{YX'}{YX}$ = Z, siendo Z □ 0.

4 Para la figura anterior, construye el triángulo homotético al triángulo ABC con el mismo centro O y k = 1.5. ¿Qué puedes decir de ambos triángulos? ____________________________. ¿Cómo son entre sí los lados correspondientes de ambos triángulos? ______________. Comenta con el grupo tus respuestas.

Integremos

Pareja

1 En su cuaderno tracen un triángulo y, sobre el plano de la figura, elijan un punto O como centro de homotecia. Cada uno de ustedes proponga un valor para la constante k; después, si tú propusiste un valor, a tu compañero le toca localizar el triángulo homotético al triángulo trazado y a la inversa: cuando tu compañero propone el valor de k, tú trazas el triángulo homotético al triángulo trazado inicialmente.

2 En la Figura 3.28 se muestran dos triángulos con lados paralelos. Al unir con rectas los vértices correspondientes éstas pasan por un punto O, como se ilustra.

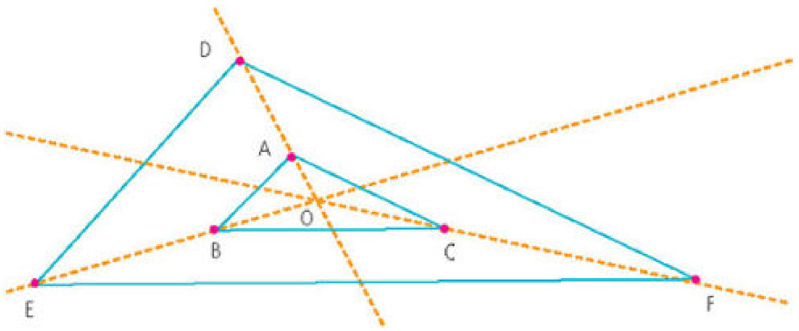


Figura 3.28

¿Cuánto vale la constante k para que se obtenga el triángulo DEF a partir del triángulo ABC? __________. Describan cómo hallaron dicho valor.

Ahora, si el triángulo inicial es DEF, ¿cuánto vale k para obtener el triángulo ABC? ______. Describan cómo encontraron dicho valor.

---

3 En los cuadros de la Figura 3.29 aparecen triángulos con lados paralelos.

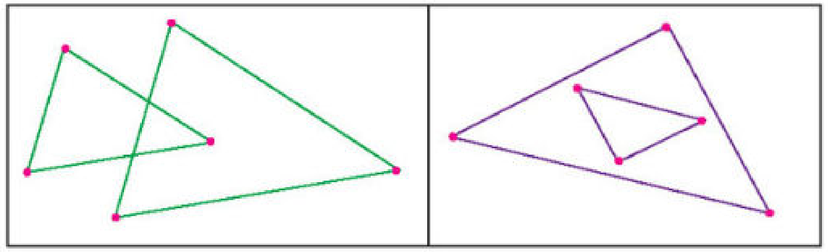


Figura 3.29

Etiqueten en cada cuadro los vértices correspondientes de ambos triángulos. Comparen sus etiquetas con las de otros compañeros.

En cada caso, ¿tendrán los dos triángulos centro de homotecia? _________. Discutan su respuesta con los compañeros del grupo.

4 Hasta ahora la constante k siempre ha sido positiva, pero qué interpretación darían si k tiene un valor negativo, por ejemplo $k = -2$.

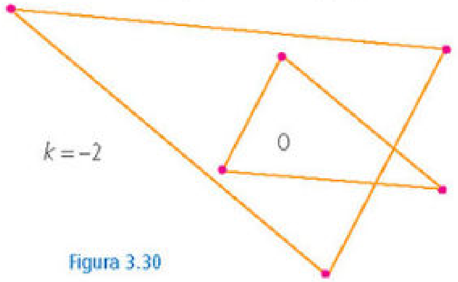


Figura 3.30

En la Figura 3.30 etiqueten con la misma letra un vértice y su correspondiente agregando una coma en el extremo superior derecho de dicha letra. Discutan el caso con otras parejas y, si están de acuerdo, describan la interpretación a la que llegaron.

Apliquemos

Individual

1 En tu cuaderno traza un triángulo ABC y localiza los puntos medios de cada uno de sus lados. Los puntos medios determinan otro triángulo, trázalo. El triángulo ABC y el triángulo determinado por sus puntos medios son homotéticos. Localiza el centro de homotecia y encuentra el valor de la constante que determina el triángulo de los puntos medios a partir del triángulo ABC. Comenta con el grupo cómo obtuviste tus respuestas.

2 En la Figura 3.31, el centro de homotecia del triángulo ABC está sobre BC.

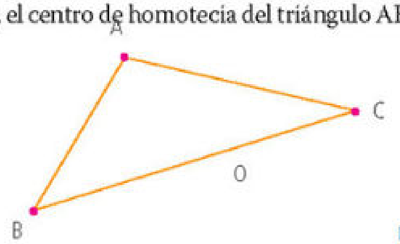


Figura 3.31

Construye los triángulos homotéticos al triángulo ABC con centro de homotecia O y $k = -1$, así como con $k = 2$

3 El centro de homotecia del cuadrilátero ABCD que se presenta en la Figura 3.32 es O.

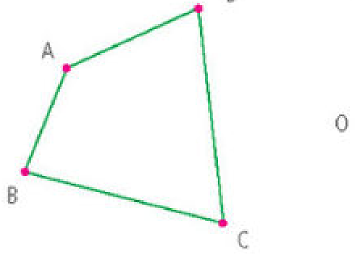


Figura 3.32

Construye el cuadrilátero homotético cuya razón de homotecia es $k = 2$.

4 Observa los siguientes cuadriláteros de la Figura 3.33 con lados paralelos.

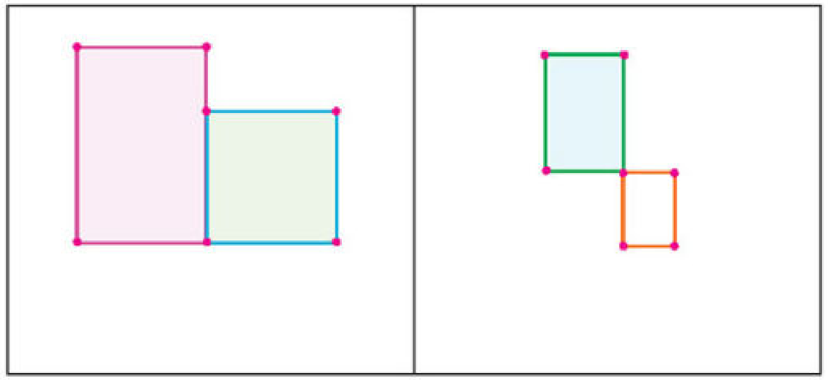


Figura 3.33

¿Son homotéticos en cada caso? ________. ¿Cuál es el centro de homotecia de cada uno? ____________________________. Discútelo con tus compañeros.

5 ¿Son semejantes dos figuras homotéticas? _______. Justifica tu respuesta.

____

____

A la inversa, ¿son homotéticas dos figuras semejantes? ________. Justifica tu respuesta.

____

____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y discutan el tema con todo el grupo.

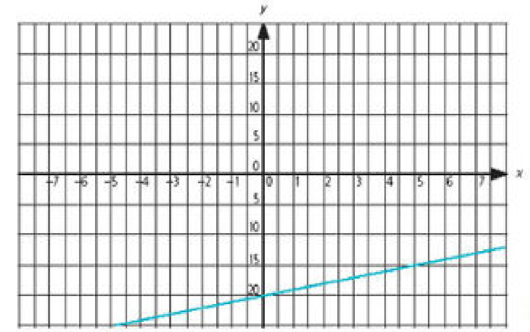
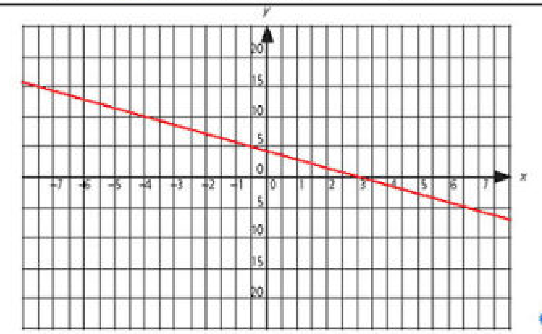
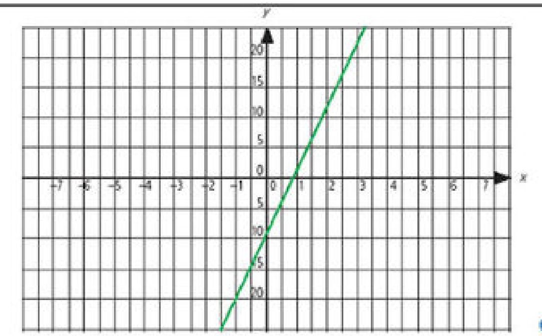
5 Lección

Gráficas de funciones para modelar diversas situaciones y fenómenos

En esta lección aprenderás a interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Conocimientos previos

Asocia la ecuación de primer grado con la gráfica que le corresponda:

$6x + 4y = 0$		 Gráfica 3.2 A
$5x + y - 7 = -6x + 2y + 4$		 Gráfica 3.2 B
$x - y = 20$		 Gráfica 3.2 C

Situación problemática

Individual

Estudia la variación:

$$x - y^2 = 0$$

Si se despeja y se puede escribir como:

$$y^2 = \pm\sqrt{x}$$

1 Observa que en este caso tenemos incorporado el signo ± ; esto se debe a que y corresponde a las dos raíces cuadradas del número x, una de las cuales es positiva y la otra negativa; de modo que para cada valor de x tendremos dos valores de y.

a ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente en esta relación? ____________________

b Completa la Tabla 3.3 de valores:

Tabla 3.3

x	y
0	
0.5	
1	±1
2	
3	
4	±2
5	
6	
7	±2.64
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

c Explica por qué en este caso a la variable independiente x no se le pueden asignar valores negativos.

____

____

d Grafica en tu cuaderno los puntos que corresponden a la relación. Compara tu gráfica con las de tus compañeros.

e Utiliza la gráfica para completar la Tabla 3.4:

Tabla 3.4

x	y
0.25	
0.5	
2.5	
3.5	

Comprendamos

Individual

1 Tomemos ahora la variación de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x, dada por:

$$x^2 - y^2 = 25$$

En este caso lo primero que se hace es despejar la variable dependiente y; con lo que se obtiene:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

De igual forma que en el ejemplo anterior aparece el ± debido al radical.

a ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable x para el que el valor dentro del radical sea positivo?

b Utiliza la última expresión para completar la Tabla 3.5:

Tabla 3.5

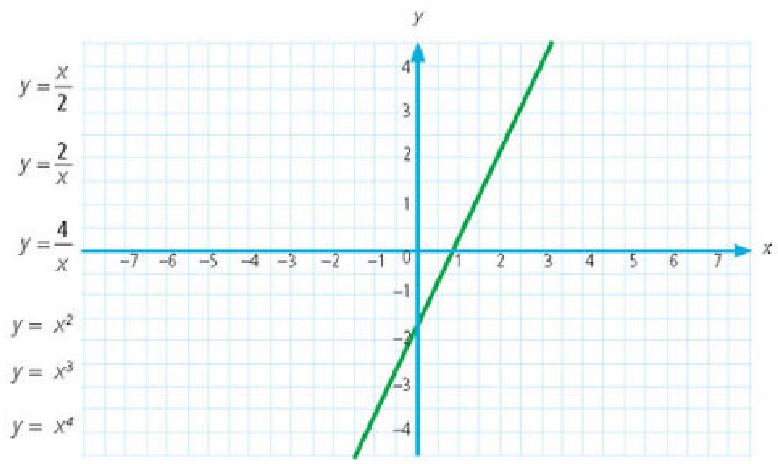
x	y
0	
1	
–1	±1
–1	
2	
–2	±2
3	
–3	
4	±2.64
–4	
5	
–5	

c Grafica en tu cuaderno los puntos que corresponden a la relación. Compara tu gráfica con las de tus compañeros.

Integremos

Individual

En tu cuaderno traza un plano cartesiano como el de la Gráfica 3.3, que se ubica en la siguiente página, y completa las gráficas que faltan:



Gráfica 3.3

1 Grafica en tu cuaderno, en un mismo plano cartesiano, cada una de las siguientes expresiones. Incluye valores negativos para la x.

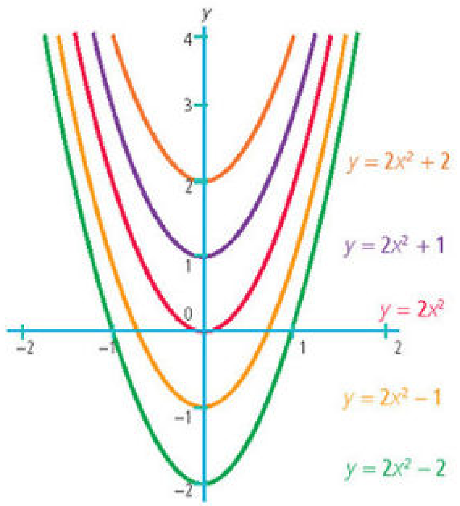
$y = x^2 + 1$ $\quad y = x^3 + 1$ $\quad y = x^2 - 5$ $\quad y = x^3 - 7$

2 Grafica en tu cuaderno, en un mismo plano cartesiano, cada una de las siguientes expresiones. Incluye valores negativos para la x.

$y = -2x^3 + 3$ $\quad y = -2x^2 + 3$ $\quad y = -2x^2 - 2$ $\quad y = -2x^3 - 10$

Entre todos comenten en qué se parecen y en qué son distintas las gráficas. Escriban en sus cuadernos las conclusiones a las que llegaron.

3 Observa la Gráfica 3.4 y escribe la expresión correspondiente a cada una de las parábolas.

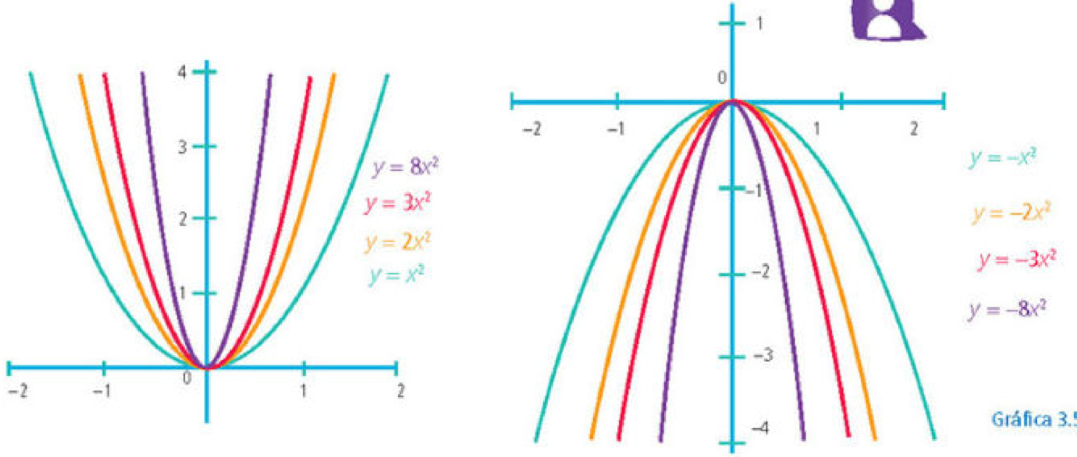


Gráfica 3.4

Apliquemos

1 Fíjate en cada gráfica y en su expresión algebraica de la Gráfica 3.5:

Individual



Gráfica 3.5

a ¿Cómo son las parábolas cuando el coeficiente del término cuadrático es positivo?

____

b ¿Cómo son las parábolas cuando el coeficiente del término cuadrático es negativo? ____________________________

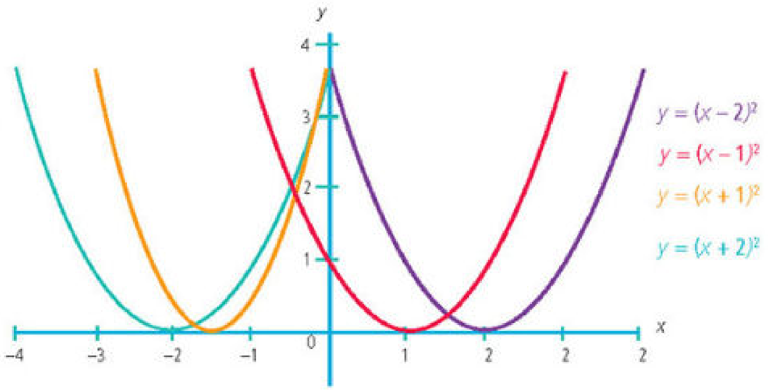
____

Entre todos comenten en qué se parecen y en qué son distintas las gráficas.
Escribe en tu cuaderno las conclusiones a las que llegaron.

2 En tu cuaderno haz cinco gráficas de la forma $y = kx^2$ con k una constante positiva y cinco gráficas en las que k sea una constante negativa. Utiliza valores para x tanto positivos como negativos. Escribe en tu cuaderno en qué se parecen y en qué son distintas las gráficas.

3 Observa la Gráfica 3.6:
Entre todos escriban en sus cuadernos una regla que describa el comportamiento de estas funciones.

4 Alejandra quiere conocer la medida que tiene de largo y de ancho el terreno de forma rectangular de su primo Juan, si él sabe que tiene 40 m de perímetro y un área de 96 m², ¿cuáles son las medidas de largo y ancho del terreno?



Gráfica 3.6

Lección 6

Gráficas para registrar el llenado de recipientes

En esta lección aprenderás a interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Conocimientos previos

En segundo grado de secundaria aprendiste a elaborar gráficas formadas por segmentos de recta, las cuales modelan situaciones de movimiento y otras de variación. Para recordar, responde las siguientes preguntas:

1 El recipiente que se muestra en la Figura 3.34 se va a llenar abriendo una llave de la que sale una cantidad constante de agua. ¿Cuál de las gráficas (3.7 A, B y C) representa la manera en que varía el nivel del agua en el recipiente mientras se llena?

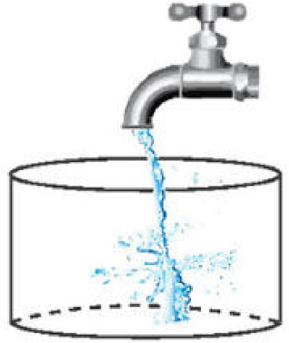
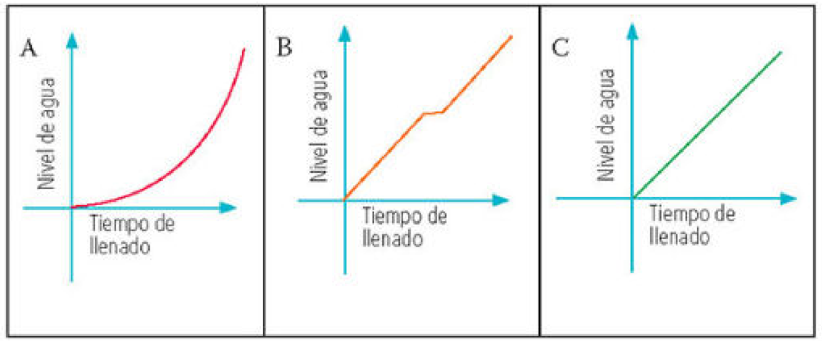


Figura 3.34



Gráfica 3.7 A, B y C

2 Dibuja en tu cuaderno una gráfica que represente cómo varía el nivel del agua conforme el recipiente de la Figura 3.35 se va llenando. El agua sale de la llave de forma constante.

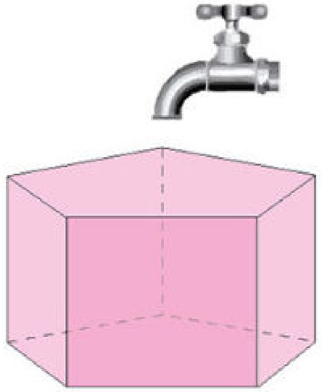


Figura 3.35

Situación problemática

La pecera de la Figura 3.36 está vacía y para llenarla se utiliza una manguera que arroja una cantidad constante de agua.

Pareja

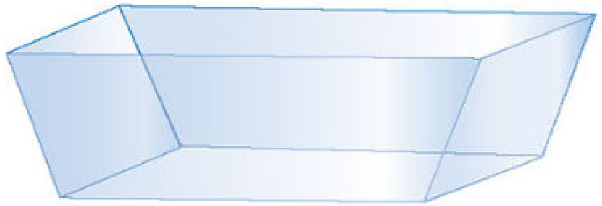
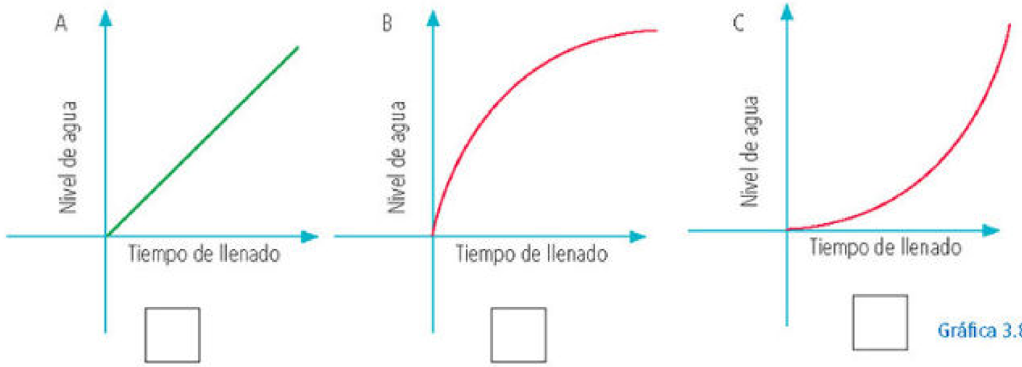


Figura 3.36

¿Cuál de las siguientes gráficas (3.8 A, B y C) representa la variación del nivel del agua en la pecera respecto al tiempo transcurrido? Marquen con una cruz el recuadro de la gráfica que eligieron.



Gráfica 3.8 A, B y C

Justifiquen su respuesta en su cuaderno. Comparen su respuesta con las de los otros equipos.

Comprendamos

Pareja

1 En pareja resuelvan para responder las preguntas siguientes. Ahora se dividió la pecera en secciones (Figura 3.37).

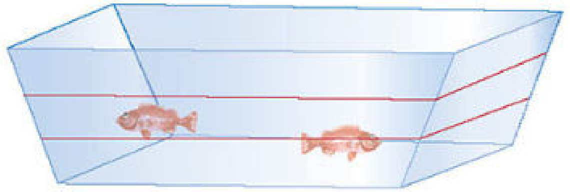


Figura 3.37

a ¿Cuál de las tres secciones tardará más en llenarse: la de abajo, la de en medio o la de arriba?

b ¿Cuál de las tres secciones tardará menos tiempo en llenarse?

c ¿Cómo varía el nivel del agua del recipiente mientras se llena? ¿El llenado es más lento al principio y más rápido al final o es más rápido al principio y más lento al final?

Justifiquen su respuesta; para ello pueden recurrir a lo que contestaron en las preguntas a) y b).

2 Las tres gráficas (3.9 A, B y C) corresponden al llenado de recipientes. Relacionen con una línea cada gráfica con la expresión que le corresponde.

a El nivel del agua aumenta de manera constante.

Gráfica 3.9 A

b El nivel del agua aumenta con rapidez al principio y después aumenta de manera lenta.

Gráfica 3.9 B

c El nivel del agua aumenta con lentitud al principio y después aumenta de manera más rápida.

Gráfica 3.9 C

Comparen con los otros equipos su respuesta al primer ejercicio y lleguen a una conclusión en grupo.

Apliquemos

1 El siguiente recipiente (Figura 3.38) está vacío; para llenarlo se utiliza una manguera que arroja una cantidad constante de agua.

Individual

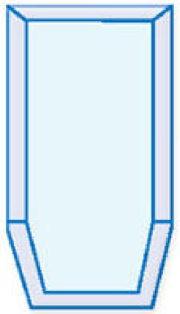


Figura 3.38

Traza en tu cuaderno el bosquejo de la gráfica que representa la variación del nivel del agua en el recipiente respecto al tiempo transcurrido.

2 Dibuja en tu cuaderno un recipiente al que le corresponda la Gráfica 3.10 de llenado.

Gráfica 3.10

Integremos

Individual

En los ejemplos y ejercicios que has resuelto en esta lección te habrás dado cuenta de que la forma de la gráfica que representa la variación del nivel del agua depende de la forma del recipiente.
Por ejemplo, si las paredes del recipiente son perpendiculares a la base, entonces la gráfica que representa el llenado del recipiente es una recta creciente (Gráfica 3.11). Éste es el caso del recipiente cilíndrico o de uno con forma de cubo, como el de la Figura 3.39.

Gráfica 3.11

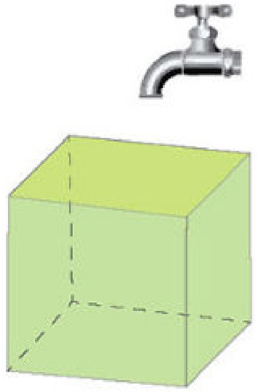


Figura 3.39

En cambio, si las paredes del recipiente no son perpendiculares a la base, la gráfica de llenado es una curva. Si el recipiente es más estrecho en su base, la gráfica será una curva que crece más rápido al principio y con mayor lentitud al final.

¿Cómo será la curva de llenado de un recipiente con la base más ancha que las secciones superiores?

____

Apliquemos

Individual

1 Dibuja en tu cuaderno un recipiente al que le corresponda la gráfica de llenado 3.12.

Gráfica 3.12

2 El recipiente que se muestra en la Figura 3.40 está vacío; para llenarlo se utiliza una manguera que arroja una cantidad constante de agua.

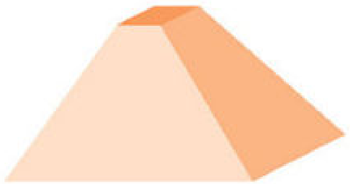
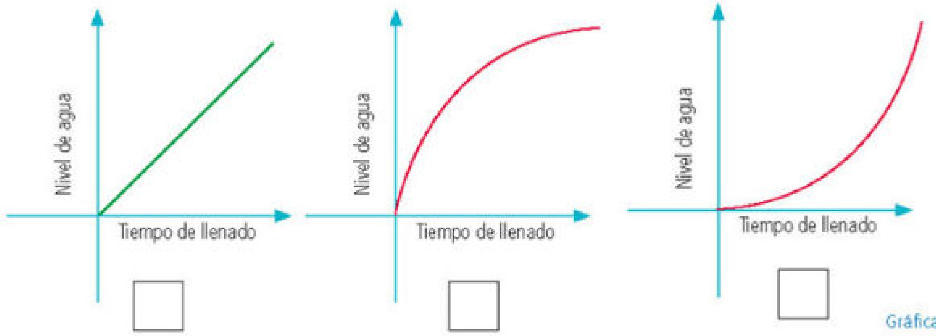


Figura 3.40

¿Cuál de las gráficas presentadas en la Gráfica 3.13 representa el llenado del recipiente? Marca con una cruz el recuadro de la gráfica que elegiste.



Gráfica 3.13

3 Dibuja en tu cuaderno la gráfica que representa la variación del nivel del agua respecto al tiempo para los recipientes de la Figura 3.41.

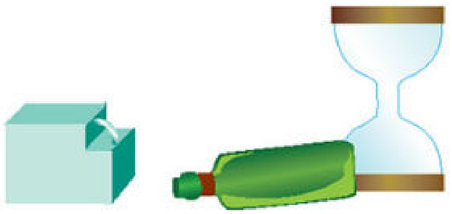


Figura 3.41

Lección 7

Regla del producto e independencia

En esta lección aprenderás a distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son independientes y a determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de dos o más eventos independientes.

Conocimientos previos

Mediante la regla del producto, la información del resultado de un fenómeno aleatorio puede cambiar la probabilidad que asignemos a sus eventos, a menos que éstos sean independientes entre sí.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es necesario conocer para asignar la probabilidad a un evento de un fenómeno aleatorio? ______________ ¿Por qué? ______________
____
2. Si se lanza un dado ordinario y se echa un volado, ¿cuántos resultados son posibles? _____ ¿Por qué? ____________________ ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de ellos? ______________
____
3. ¿El resultado del volado depende del lanzamiento del dado? ________
____

Situación problemática

Individual

Se lanzan un dado amarillo y uno verde una vez. A es el evento de que se obtenga la suma 6. Si cayó 1 con el dado amarillo, ¿cuál es la probabilidad de A?

Discute con un compañero tus respuestas a cada inciso.

1. ¿A qué fenómeno aleatorio se refiere la situación planteada?
____
2. Anota en tu cuaderno todas las posibilidades que constituyen el espacio muestra de ese fenómeno.
3. ¿Cuáles son las posibilidades que corresponden al evento A?
____

4. ¿Cuál es su probabilidad? ______________
5. ¿Cuáles son todas las posibilidades que corresponden al evento B de que caiga 1 con el dado amarillo? ______________
6. ¿Cuál es la probabilidad de B? ______________
7. De las posibilidades del evento B, ¿cuáles son comunes al evento A?
____
8. ¿Cuál es la probabilidad de A y B? ______________

Si se sabe que ocurrió el evento B, para actualizar la probabilidad del evento A nos restringimos a las posibilidades del espacio muestra que corresponden a B.

9. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de A *dado que* B ocurrió?

$$P\,(A \text{ dado que } B \text{ ocurre}) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

10. La información de que B ocurrió actualizó la probabilidad de A de ________ a ________.

Para P (A si B ocurre) se utiliza la notación $P(A|B)$. La barra "|" significa "dado que" o "si".

Para calcular una probabilidad condicional, el evento que condiciona debe tener probabilidad diferente de 0.

Si multiplican los dos miembros de la expresión de la probabilidad condicional por P(B) se obtiene una expresión para la conjunción de eventos:

$$P(B) \bullet P(A|B) = P(A \text{ y } B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Regla del producto}$$

Glosario

Probabilidad actualizada: las probabilidades actualizadas por la nueva información se llaman probabilidades condicionales. La información de que **B** ocurrió es una condición para considerar la ocurrencia de **A**.

La probabilidad condicional del evento **A** dado que ocurrió **B** es:

$$P(A|B) \frac{P(A \text{ y} B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B) > 0$$

Comprendamos

Pareja

En pareja discutan cada problema y sus incisos.

1. Observen la Tabla 3.6: dos urnas iguales, que no son transparentes, contienen bolas de colores rojo (R), verde (V) y azul (A).

   Se elige una urna al azar y se saca, también al azar, una bola, que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna U_2?

Urna	Rojo (R)	Verde (V)	Azul (A)
U1	3	4	1
U2	1	2	3

Tabla 3.6

a ¿Cuál es el espacio muestra (Ω) asociado al fenómeno de seleccionar al azar una urna y sacar al azar una bola? ______________________
____

b ¿Cuál es el evento complementario de "se escoge la urna U_1"?
____

c Según el enunciado, las dos urnas tienen la misma __________ de ser seleccionadas, es decir, son ________________. Por tanto, sus probabilidades son: $P(U_1)$ = _______ ; $P(U_2)$ = _______.

d En el siguiente diagrama de árbol (Figura 3.42) indiquen al final de cada rama el evento correspondiente. *Dado que* se selecciona la urna U_1, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bola verde? Es decir, ¿cuál es el valor de $P(V|U_1)$? _________. Anota este valor en la rama respectiva.

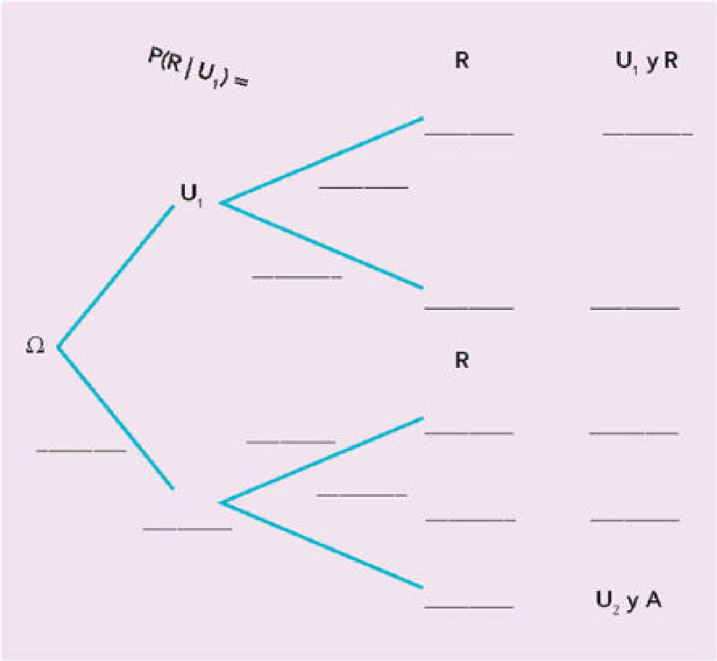


Figura 3.42

e De igual manera que en el inciso 4, determinen las probabilidades:

$P(A|U_1)$, $P(R|U_2)$, $P(V|U_2)$ y $P(A|U_2)$.

Anoten estos valores en las ramas correspondientes del diagrama de árbol.

f Observen que, para cada nodo, las probabilidades en las ramas que salen de él suman 1: $P(U_1) + P(U_2)$ = ____________ = _____

$P(R|U_1) + P(V|U_1) + P(A|U_1)$ = ____________________ = _____

$P(R|U_2) + P(V|U_2) + P(A|U_2)$ = ____________________ = _____

g ¿Cómo son entre sí los eventos U_1 y R y U_2 y R? ______________

h Expresen el evento R en términos de U_1 y R y U_2 y R: ___________

i Apliquen la regla del producto y calcula $P(U_1 \text{ y } R)$ y $P(U_2 \text{ y } R)$. Anoten los resultados respectivos a la derecha del diagrama de árbol. Calcula P(R) = ______________________________________

j Calculen ahora la probabilidad de que si la bola extraída fue roja se haya seleccionado la urna U_2:

$$P(U_2 \mid R) = \frac{P(R \text{ y } U_2)}{P(R)} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

k Comparen sus respuestas a los incisos 3 y 9: ¿qué probabilidad es mayor? _________. O sea que la probabilidad de U_2 se actualizó con la información de que ocurrió R.

Noten que en los incisos 4 y 5 los eventos *condicionantes* U_1 y U_2 (selección de urna) ocurren *antes* que los eventos *condicionados* A, R y V. Al contrario, en el inciso 9 el evento *condicionante* R ocurre *después* que el evento *condicionado* U_2 y aún así puede calcularse su probabilidad condicional con la regla del producto.

Individual

2 En 2007, la ciudad de Chicago donó a la localidad Pánuco, en el estado de Veracruz, una ambulancia para su clínica y un camión de bomberos. Supón que la probabilidad de que el camión de bomberos esté disponible cuando se le solicite es de 0.98 y que la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se la requiera es de 0.92. Si se incendia una edificación y hay un herido, ¿cuál es la probabilidad de que el camión de bomberos y la ambulancia estén disponibles?

a ¿Cuál es el espacio muestra asociado al fenómeno al que se refiere el enunciado del problema? ______________________________

b Especifica los eventos en el enunciado:

A: _______________; B: _______________; A y B: _______________

c A partir del enunciado, identifica las probabilidades:

P(A)= ____________; P(B) = ____________; P(A y B) __________.

d Nota que el servicio de la clínica no puede depender de si llega o no un llamado a la estación de bomberos. Luego, la probabilidad de A no cambia bajo la condición de que B ocurra, o sea P(A|B) = ________.

e Aplica la regla del producto a la relación en el inciso anterior:________

f ¿Cuál es la probabilidad de que el camión de bomberos y la ambulancia estén disponibles? ________________________________

Como en el inciso 4, nota también que el evento A no puede condicionar el evento B. Por tanto, la probabilidad de B no cambia bajo la condición de que A ocurra y tenemos:

$P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$,

es decir, los eventos A y B son *independientes*.

Si no es así, los eventos son *dependientes*.

Si A y B son independientes, por la regla del producto, la probabilidad de que ocurran conjuntamente es el producto de sus probabilidades:

$P(B) \cdot P(A) = P(A \text{ y } B)$

Regla del producto para eventos independientes

g Si la ambulancia estuviera sólo al servicio de los casos en que se requiriera a los bomberos, ¿serían independientes los eventos A y B? ____. La disponibilidad de la ambulancia estaría __________ a la solicitud del servicio de ________________.

Mediante la regla del producto se comprende mejor el comportamiento de las probabilidades de los eventos independientes.

Integremos

Pareja

En pareja discutan y respondan los ejercicios siguientes:

1 Una caja contiene 20 focos, de los cuales cinco están fundidos. Se toman al azar dos focos, uno tras otro. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos estén fundidos?

a ¿Cuál es el espacio muestra asociado al fenómeno en el problema?

b Indiquen el evento de interés en el problema: ________________

c ¿El resultado de sacar un foco la segunda vez depende del primero?

¿Por qué? ________________________________

d ¿Cuántos focos disponibles hay para la primera extracción? ____. De éstos, ¿cuántos están fundidos? ______. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer foco esté fundido? ________________

e Para la extracción del segundo foco, ¿cuántos focos hay disponibles? ______. Si el primer foco estaba fundido, ¿cuántos focos fundidos quedan aún en la caja? ______ ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo foco que se saque esté fundido? ________________

f ¿Cuál es, entonces, la probabilidad de que el primero y el segundo focos extraídos estén fundidos? ________________

Individual

2 Una caja contiene 20 fusibles, de los cuales cinco están defectuosos. Se extrae al azar un fusible, se prueba, se regresa a la caja y se mezcla con los demás; luego se extrae al azar un segundo fusible. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean defectuosos?

a ¿Cuál es el fenómeno aleatorio al que se refiere el problema?

b Describe el espacio muestra asociado a ese fenómeno:

c El resultado de extraer un fusible la segunda vez, ¿depende del resultado de la primera extracción? _______. ¿Por qué?________________

d ¿Cómo son entre sí los resultados de la primera y la segunda extracción? ____________. ¿Por qué? ________________

e ¿Cuál es la probabilidad de que el primer fusible sea defectuoso? ________. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible sea defectuoso? ___________. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?

Apliquemos

Individual

Contesta los incisos de cada problema. Presenta tus respuestas ante el grupo.

En el aeropuerto de una ciudad, la probabilidad de que las aerolíneas nacionales despeguen a tiempo es $P(D) = 0.83$, de que aterricen a tiempo es $P(A) = 0.82$, y de que despeguen y aterricen a tiempo es 0.78. Calcula la probabilidad de que un avión nacional:

a) Llegue a tiempo, dado que salió a tiempo.

b) Haya salido a tiempo, dado que llegó a tiempo.

c) Aterrice a tiempo dado que no despegó a tiempo.

1 ¿Cuál es el espacio muestra asociado al fenómeno aleatorio planteado?
____
____

2 En la Tabla 3.7, especifica los eventos D^c, A^c, los datos del problema y las cuatro conjunciones de eventos en las celdas centrales.

	A	A^c ________	
D	______ ________ $P(D \text{ y } A)$ = ____	______ ________ $P(D \text{ y } A^c)$ = ____	$P(D)$ = ____
D^c ________	______ ________ $P(D^c \text{ y } A)$ = ____	______ ________ $P(D^c \text{ y } A^c)$ = ____	$P(D^c)$ = ____
	$P(A)$ = ______	$P(A^c)$ = ______	

Tabla 3.7

3 En el inciso a), ¿cuál es el evento condicionante y cuál es el evento condicionado? ______, ______. ¿Cuál es su conjunción? ____________

4 Calcula la probabilidad condicional de A dado D: ____________

5 En el inciso b), ¿cuál es el evento condicionante y cuál es el evento condicionado? ______, ______. ¿Cuál es su conjunción? ____________

6 Calcula la probabilidad condicional de D dado A: ____________

7 En el inciso c), ¿cuál es el evento condicionante y cuál es el evento condicionado? ______, ______. ¿Cuál es su conjunción? ____________

8 Calcula la probabilidad condicional de A dado D^c: ____________

Individual

Una tienda tiene instalada una alarma que funciona en 95% de los casos en que hay un intento de robo. La probabilidad de que funcione sin que haya un intento de robo es 0.03 y la probabilidad de que ocurra un robo es 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un intento de robo y la alarma no funcione?

1 ¿Cuál es el espacio muestra asociado a la situación que plantea el problema? ____________

2 En la Tabla 3.8, especifica los eventos del problema si “F” denota “funciona” y “R” “robo”:

F: ____________		F|R: ____________
F^c: ____________		F|R^c: ____________
R: ____________		R y F^c: ____________
R^c: ____________		

Tabla 3.8

3 ¿A cuál de los eventos en el inciso 2 se refiere la pregunta del problema? ____________

4 Completa el diagrama de árbol con los eventos y sus probabilidades.

5 Para cada nodo, las probabilidades asignadas a las ramas que salen de él suman ______. Asigna entonces todas las probabilidades faltantes en el diagrama de árbol (Figura 3.43).

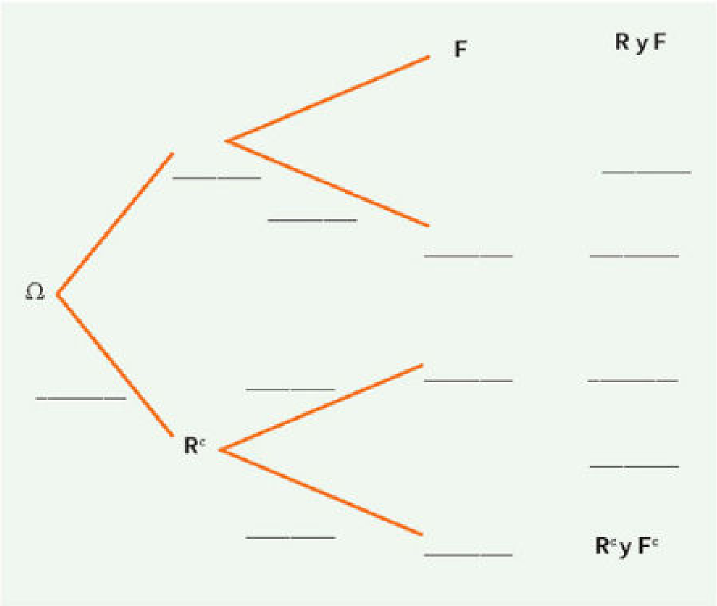


Figura 3.43

6 Aplica la regla del producto para calcular la probabilidad pedida:

7 Discute con un compañero acerca de si esta probabilidad puede considerarse grande o pequeña: _____________. ¿Por qué? _____________

Alma, Benito y Carlos se colocan al azar en línea recta. R es el evento "Benito está a la derecha de Alma"; S es el evento "Carlos está a la derecha de Alma".

a ¿Cuál es la probabilidad de R y S?

b ¿El evento R es independiente de S?

1 ¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea las tres personas?

2 ¿En cuántas de esas formas Benito y Carlos están a la derecha de Alma? Es decir, ¿cuántas posibilidades se tienen para R y S? _____________

3 Para el inciso a) calcula P(R y S) = _____________

4 ¿De cuántas maneras Benito puede quedar a la derecha de Alma? _____
Entonces P(R) = _____ = _____________

5 ¿De cuántas maneras Carlos puede quedar a la derecha de Alma?

Entonces, P(S) = _____ = _____

6 Calcula P(R) × P(S) = _____________. ¿Este producto es igual a P(R y S)? _____. ¿Son S y R eventos independientes? _____________

Para tres volados con una moneda ordinaria, ¿son independientes los eventos "cae sol en el primer volado" y "cae águila en el segundo volado"?

1 Anota en tu cuaderno el espacio muestra asociado a tres volados.

2 Identifica todos los casos de S_1: sol en el primer volado: _____________. $P(S_1)$ = _____________

3 Identifica todos los casos de A_2: águila en el segundo volado: _____________. $P(A_2)$ = _________ Calcula $P(S_1) \cdot P(A_2)$ = _______

4 Identifica todos los casos de S_1 y A_2: _________. $P(S_1 \text{ y } A_2)$ = _________

5 ¿Son independientes los eventos S_1 y A_2? ___. ¿Por qué? _____________

TIC

Ingresa a http://www.matemath.com/azar/index.html y activa el vínculo "Problemas del tema". Con un compañero, discute y explora los problemas: "El príncipe y su astrólogo", "Calcetines a ciegas" y "Monedas en mi bolsillo".

Evaluación

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, al terminar muéstralos a tu profesor para su evaluación.

1. En la fachada del Museo ABC en Madrid:

   a) Colorea de color azul dos parejas de triángulos semejantes, etiqueta sus vértices y argumenta tu respuesta.

   b) Colorea de color verde dos parejas de triángulos congruentes, etiqueta sus vértices y argumenta tu respuesta.

Figura 3.44

2. ¿Cuál es la altura del edificio?

   a) 28 m   b) 7 m   c) 20 m   d) 17 m

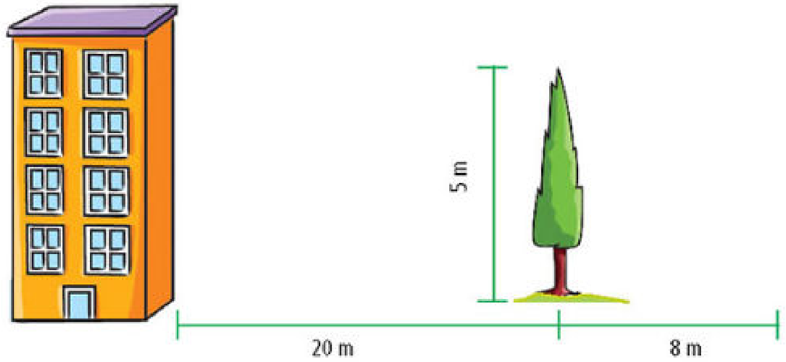


Figura 3.45

3. Explica si el triángulo amarillo y el triángulo verde de las figuras que aparecen en seguida son homotéticos o no.

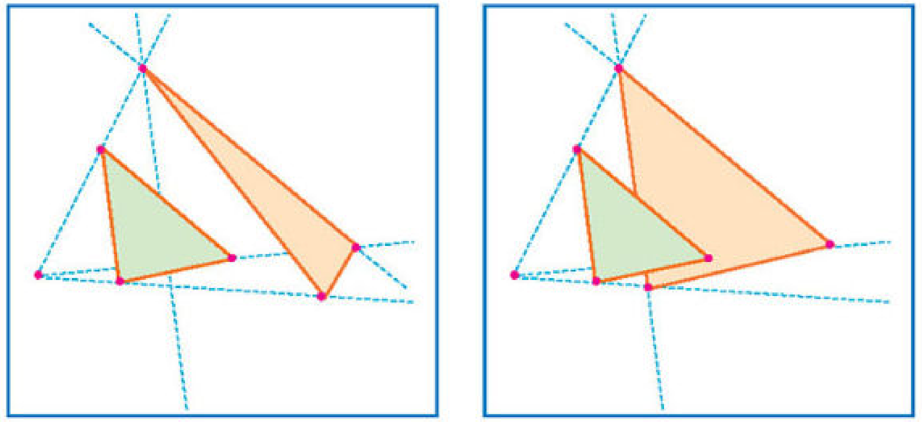


Figura 3.46

4. Lee con atención y resuelve lo que se te pide.

Parcelas de terceira

La isla Terceira forma parte del archipiélago de las Azores, Portugal. Su nombre hace referencia a que fue la tercera isla del archipiélago en ser descubierta, después de la Santa María y la de San Miguel. La gran fertilidad del suelo de Terceira es el motivo por el que la mayor parte de los 58 000 habitantes de la isla viven, todavía hoy, de la agricultura. Terceira es el mayor productor del archipiélago de cereales, ganadería y recolección de algas.

En esta isla existen parcelas de pasto como la siguiente en la cual alrededor de la parcela hay un camino de ancho uniforme y que tiene un área de 1800 m²

a) De las siguientes ecuaciones indica cuál te permite calcular el ancho del camino.

$4x^2 + 340x + 1\,800 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 170x + 1\,800 = 0$

$4x^2 + 340x - 1\,800 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 170x - 1\,800 = 0$

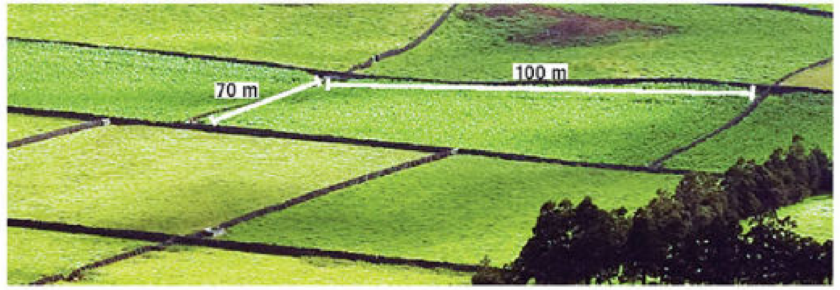


Figura 3.47

b Señala cuánto mide de largo el camino.

110 m   90 m   5 m   80 m

c Indica cuánto mide el ancho del camino.

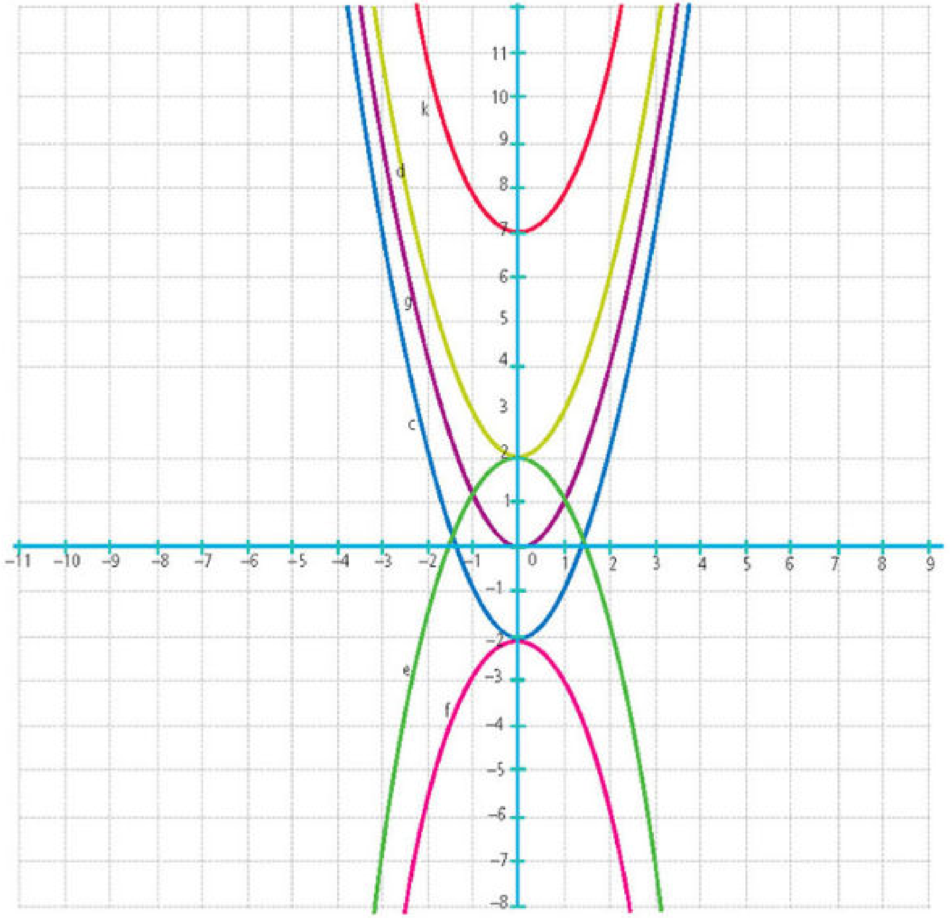
10m   20 m   5 m   15 m

5. Observa las siguientes gráficas, relaciónalas con la función que les corresponde y contesta las preguntas:

$y = x^2 - 2$ $y = -x^2 - 2$

$y = x^2 + 2$ $y = x^2$

$y = -x^2 + 2$ $y = x^2 + 7$



Gráfica 3.14

a ¿Cuáles son expresiones que tienen la parábola que abre hacia arriba?

____

____

b ¿Cuáles son expresiones que tienen la parábola que abre hacia abajo?

____

____

Bloque IV

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	1	21	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	2	22	
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	3	23	
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo	4	24	
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente	5	25	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa	6	26	
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión	7	27	

Lección 1

Expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

En esta lección aprenderás a determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.

Conocimientos previos

En primero y segundo grados de secundaria aprendiste a identificar un patrón en secuencias numéricas o de figuras (Figura 4.1), así como a representar dicho patrón mediante una expresión algebraica. Todas las expresiones obtenidas fueron de primer grado; ahora veamos qué sucede cuando un patrón queda expresado mediante una expresión de segundo grado.

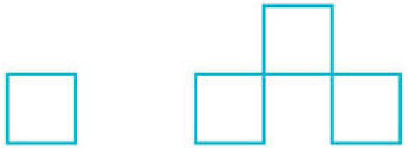


Figura 4.1

Situación problemática

Pareja

1 Observen la sucesión de la Figura 4.2.

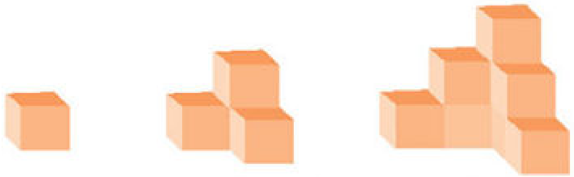


Figura 4.2

a Dibujen las siguientes dos figuras de dicha sucesión en los espacios siguientes.

b Ahora completen la Tabla 4.1.

Figura	Total de cubos
1	1
2	4
3	
4	
5	
n	

Tabla 4.1

c ¿Cuál es la expresión algebraica que determina el número de cubos que forman la figura que ocupa la enésima posición de la sucesión? Escríbanla en la última fila de la tabla anterior.

d ¿Cuántos cubos tendrá la figura que está en la posición 20? ________

e ¿Qué posición ocupa la figura con 625 cubos? ________

f ¿Cuántos cubos tendrá la figura cuya posición es la 120? ________

g ¿Qué posición ocupa la figura con 169 cubos? ________

h ¿Cómo encuentran el lugar que ocupa la figura dado el número de cubos que la conforman? Explíquenlo en su cuaderno.

i Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

2 Resuelvan lo que se les pide respecto a la sucesión de la Figura 4.3:

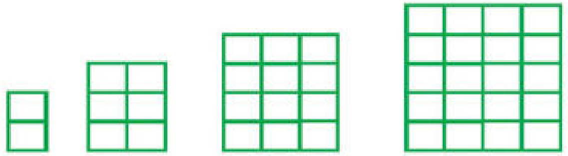


Figura 4.3

a Dibujen las figuras 4 y 6 de la sucesión en los espacios siguientes.

b ¿Cuántos cuadritos tiene en total la figura 4? ________, ¿y la 6?

c Completen las primeras seis filas de la Tabla 4.2.

Figura	Base	Altura	Total de cuadritos
1	1	2	2
2			
3		4	12
4			
5			30
6		7	

Tabla 4.2

d ¿Cómo va cambiando la medida de la base de las figuras?

e ¿Cómo va cambiando la medida de las alturas de las figuras?

f ¿Qué relación encuentran entre la medida de la base de cada figura y la posición que ocupa en la sucesión?

g ¿Qué relación encuentran entre la medida de la base y la medida de la altura en cada figura?

h ¿Cuánto medirán la base y la altura de la figura en la posición 10? Completen la séptima fila de la tabla anterior. ________

i Representen con la letra n la figura que ocupa la posición enésima. Si la base mide n, ¿cuánto mide su altura? Completen la octava fila de la tabla anterior con los datos de la enésima figura.

3 En cada figura de la sucesión anterior:

a ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo?

b ¿Cómo obtuvieron el número total de cuadritos de cada figura?

c ¿Cuánto mide el área de la figura o el número total de cuadritos? Simplificando la expresión:

d Agreguen una quinta columna a la tabla anterior y calculen el total de cuadritos de cada figura; utilicen la expresión que encontramos.

4 Si partimos de una expresión algebraica de segundo grado, podemos obtener una sucesión de números, por ejemplo, para la expresión $n^2 + 1$ (Tabla 4.3).

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = ____	n = ____	n = ____
2	6			30	42	56

Tabla 4.3

5 Completen la Tabla 4.4 para la expresión: $n - 6 \times n$.

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = ____	n = 8	n = 9
−5	−8	−9			0	7		

Tabla 4.4

Comprendamos

Existen diversos métodos para encontrar el patrón que hay detrás de una secuencia tanto numérica como de figuras. En esta lección verás dos procedimientos; tú puedes elegir con el que más te acomodes y utilizarlo para encontrar la expresión algebraica buscada.

Individual

1 Observa la siguiente sucesión de la Figura 4.4:

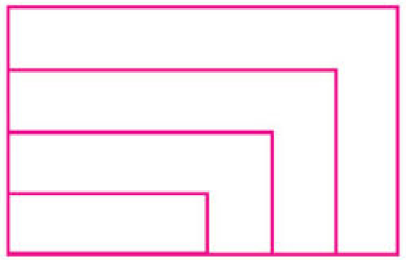


Figura 4.4

a ¿Cuánto va creciendo la altura de los rectángulos?

b ¿Cuánto va creciendo la base de los rectángulos?

___

c Dibuja sobre la cuadrícula las dos figuras siguientes de la sucesión.

d ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura que ocupa la posición 7? ______, ¿y la 8? ______.

e Completa la Tabla 4.5:

Figura	1	2	3	4	5	6
Total de cuadritos	3		15		35	
Primera diferencia	8 – 3 = 5	15 – 8 = 7	___– 15 = 9	35 –___= 11	___– 35= ___	
Segunda diferencia	7 – 5 = 2	9 – 7 = 2	11 – 9 = ___	_____– 11 = 2		

Tabla 4.5

f Obtén la expresión algebraica de segundo orden:

___

2 Observa la tabla anterior y responde lo que se te pide:

a ¿Cuánto aumenta el número total de cuadritos entre la primera y la segunda figuras? __________, ¿entre la tercera y la segunda? __________, ¿y entre la cuarta y la tercera?__________

b ¿Qué significa la segunda diferencia que se muestra en la tabla?

___

___

c Encuentra la expresión algebraica de segundo grado con la cual puedas obtener la misma sucesión de cuadritos.

___

___

Integremos

Pareja

1 Veamos cómo, a partir de la expresión de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$, podemos generar una sucesión y obtener las diferencias respectivas (Tabla 4.6).

	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de x	$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c = 4a +$ ___ $+c$	$a(3)^2+b(3) + c =$ ___ $+ 3b+c$	$a(4)^2 + b(4) + c =$ ___	$a(5)^2 + b(5) + c =$ ___
Primera diferencia	$(4a) + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b$	$(9a) + 3b + c) - ($___ $+ 2b + c) = 5a + b$		$(\ \ ) - (9c + 3b + c) = 7a + b$	$(\ \ ) - (16a + 4b + c) =$ ___
Segunda diferencia	$(r + b) - (3a + b) = 2$	$(7a + b) - (\ \ \ \ ) = 2a$		$(7a + b) - (7a + b) = 2a$	

Tabla 4.6

a Combinen las relaciones algebraicas obtenidas en la tabla anterior con los resultados encontrados en la sucesión generada por el conteo de los cuadritos por cada figura.

Pueden tomar cualquiera de los tres sistemas de ecuaciones. Veamos el mismo ejemplo:

$2a = 2$ *entonces* $a =$ ____________.

$3a + b = 5 \quad 31 + b = 5$ *entonces* $b =$ ____________.

$a + b + c = 3 \quad 1 + 2 + c = 3$ *entonces* $c =$ ____________.

De modo que la expresión buscada es: ______________________

2 Utilicen la expresión que obtuvieron.

a ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura que ocupa la posición 50?, ¿y la posición n? ______________________________

b ¿En qué posición se encontrará la figura con 120 cuadritos? ______

3 Completen la Tabla 4.7.

Figura	Base	Altura	Total de cuadritos
1	3	1	3
2			
3			
4			24
5			
6	8		
n	$n + 2$		$(n + 2)\,n$

Tabla 4.7

a) Justifiquen por qué la expresión obtenida en la tabla anterior es equivalente a la ecuación obtenida en el ejercicio anterior.

____

____

b) Expliquen en su cuaderno por qué para conocer la posición de una figura dado el número de cuadritos, basta con resolver una ecuación. Por ejemplo: en el caso de una figura con 143 cuadritos, basta con resolver la ecuación $x^2 + 2x = 143$.

4 Observen la sucesión de figuras que se muestra en la Figura 4.5.

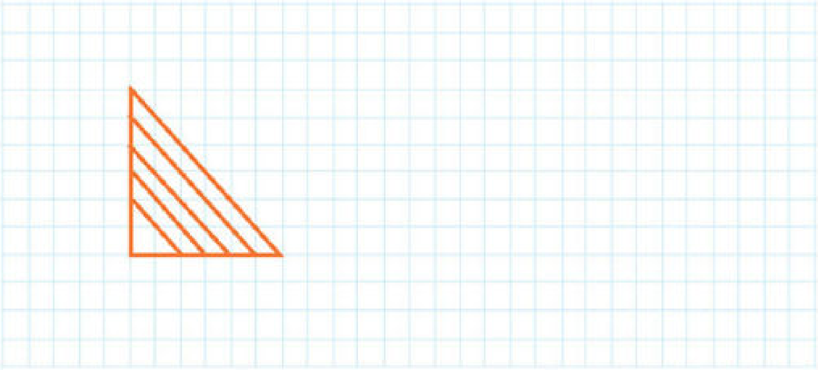


Figura 4.5

a) ¿Cuánto va creciendo la altura de los triángulos? ____________, ¿y sus bases? ______________________________

b) Dibujen sobre la cuadrícula las dos figuras siguientes de la sucesión.

c) ¿Cuántos cuadritos tendrá la figura en la posición 10? __________, ¿y en la 15? ____________,

d) Completen la Tabla 4.8.

Figura	Base	Altura	Total de cuadritos
1	2	2	2
2	3		
3			
4		5	12.5
5			
6			
n			

Tabla 4.8

e) ¿Cómo obtienen el área de un triángulo? En el triángulo de la enésima posición de la sucesión de figuras, la base es $n + 3$ y la altura es $n + 1$. ______________________________

f) ¿Cuál es la expresión algebraica para calcular el área de cualquier triángulo de la sucesión de figuras; es decir, el número total de cuadritos?

____

Como se habrán dado cuenta, en las sucesiones numéricas o figurativas de esta lección algunas expresiones algebraicas que encontraste para definir el enésimo término tienen la característica de ser cuadráticas (de grado dos).

Una manera muy sencilla de obtenerla es sustituir los valores de x en la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c$ y utilizar el método de diferencias. Este método es otra forma de encontrar la expresión que determina la sucesión en cuestión, y conocer ya sea el número de figuras que corresponden en alguna posición de la sucesión o bien dicha posición.

Apliquemos

Individual

1 En las dos sucesiones de esta lección, obtén la ecuación que posibilita conocer el número total de cubos o cuadritos, según corresponda, para cada figura; utiliza el método de diferencias.

2 Es posible representar números por medio de puntos arreglados con cierto orden geométrico como lo hacían los pitagóricos. Observa la sucesión de números cuadrados de la Figura 4.6 y responde lo que se te pide:

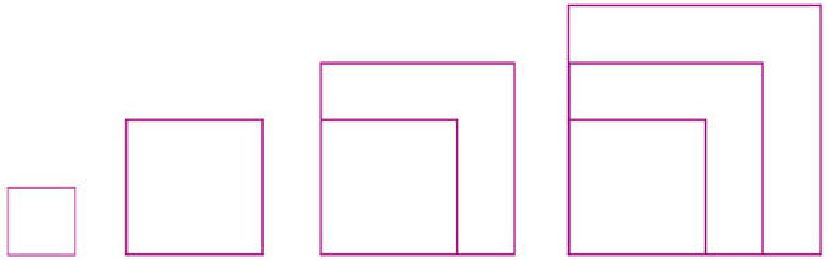


Figura 4.6

a ¿Cuántos puntos aumenta del número 1 al 4?, ¿y del 4 al 9?

b ¿Cuáles serán los siguientes dos números de la sucesión? Dibújalos en la sucesión.

c Completa la Tabla 4.9.

Posición	Número cuadrado
1	1
3	9
5	
	36
n	

Tabla 4.9

d ¿Cuál es la expresión algebraica para conocer cualquier momento cuadrado de la sucesión?

Construyendo cuerpos al girar figuras planas

2 Lección

En esta lección aprenderás a anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras, a construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos, a anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o un cono recto y a determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.

Conocimientos previos

Traza en tu cuaderno un rectángulo como el de la Figura 4.7.

Figura 4.7

Recorta el rectángulo y une dos lados opuestos de manera que coincidan. ¿Qué cuerpo se forma al unir los lados mencionados del rectángulo? ___________. Traza dicho cuerpo en el espacio que sigue.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

Situación problemática

Individual

Construye con cartulina tres rehiletes como los que aparecen en la Figura 4.8, que se ubica en la siguiente página.

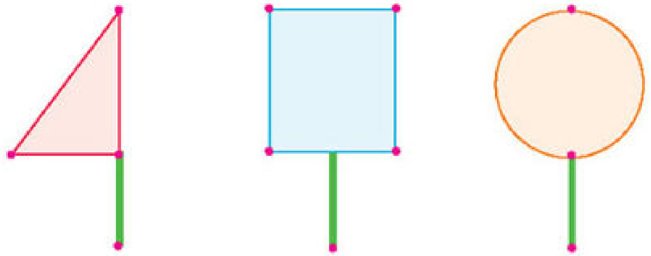


Figura 4.8

Cuando el viento sopla fuerte, los rehiletes giran y forman cuerpos geométricos; de izquierda a derecha, dibuja en el espacio que sigue los cuerpos formados por cada uno de los rehiletes.

¿Qué nombres reciben estos cuerpos, respectivamente?

____

____

Comprendamos

Individual

1 Traza en una cartulina un triángulo rectángulo y recórtalo. Si giras dicho triángulo rectángulo teniendo como eje de giro uno de los catetos, ¿qué nombre recibe el cuerpo que se forma? ______________. Supongamos que los catetos miden 3 cm y 4 cm, respectivamente, ¿cuál de los dos cuerpos que se forman al tomar como eje de giro cada uno de los catetos tiene mayor volumen? ______________. Justifica tu respuesta. ____

____

____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

2 Ahora traza un rectángulo en una cartulina y recórtalo. ¿Qué nombre recibe el cuerpo que se forma al girar el rectángulo si lo haces teniendo como eje de giro uno de sus lados? ______________. Supongamos que los lados del rectángulo miden 5 cm y 8 cm, ¿cuál de los dos cuerpos que se forman al tomar como eje de giro cada uno de dichos lados tiene menor volumen? ______________. Justifica tu respuesta.

____

____

Compara tus respuestas con las de otro compañero.

3 Finalmente, traza un semicírculo en una cartulina y recórtalo. Si giras dicho semicírculo tomando como eje de giro su diámetro, ¿qué nombre recibe el cuerpo que se forma? ______________. Supongamos que el diámetro del semicírculo mide 10 cm, ¿cuánto mide el volumen del cuerpo formado al girar el semicírculo? ______________________________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

Compara tus respuestas con las de otro compañero.

Integremos

Pareja

1 El giro alrededor del eje (punteado) de las figuras planas que se presentan en la Figura 4.9 determina cuerpos; dibújenlos debajo de cada una de ellas.

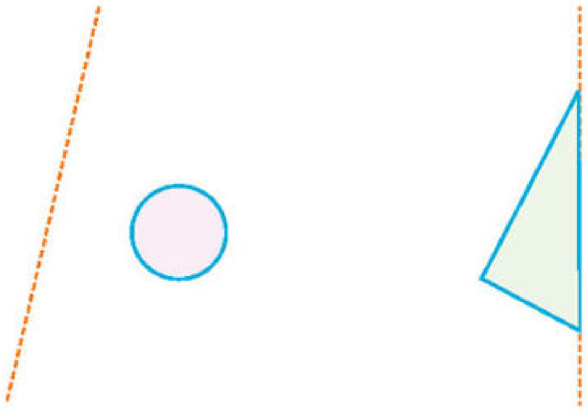


Figura 4.9

Muestren al grupo sus dibujos de los dos cuerpos.

2 Construyan el desarrollo plano del cilindro recto que se muestra en la Figura 4.10.

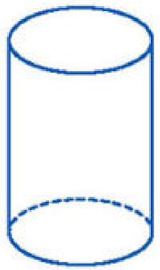


Figura 4.10

Describan cómo lo obtuvieron.

3 Discutan cómo construir el desarrollo plano de un cono recto. En la Figura 4.11 se presenta un cono circular recto; al unir por medio de segmentos la cúspide (punto más alto) con cualquier punto sobre la circunferencia de la base, ¿cómo son entre sí dichos segmentos?

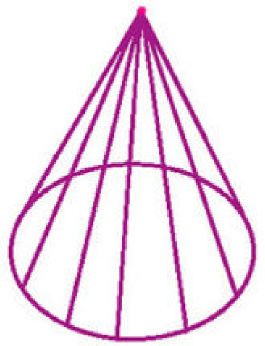


Figura 4.11

Describan cómo lo hicieron.

Apliquemos

Individual

1 ¿Cuál de los dos desarrollos de la Figura 4.12 representa el desarrollo de un cono? ______

¿Por qué el otro no representa el desarrollo de un cono?

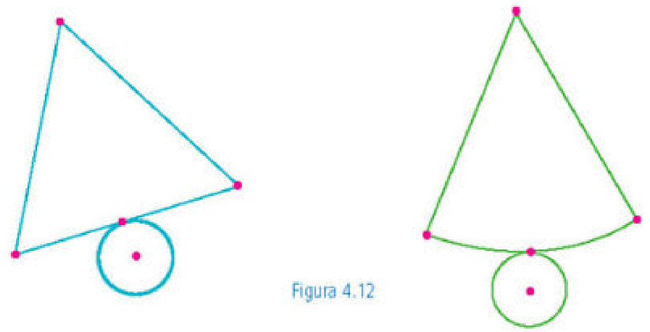


Figura 4.12

Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

2 ¿Qué relación tienen las longitudes de las circunferencias de las dos figuras del inciso anterior con las medidas de los lados a los cuales son tangentes?

3 ¿Cuál de los siguientes dos desarrollos planos (Figura 4.13) representa el desarrollo de un cilindro con sus dos tapas? ______

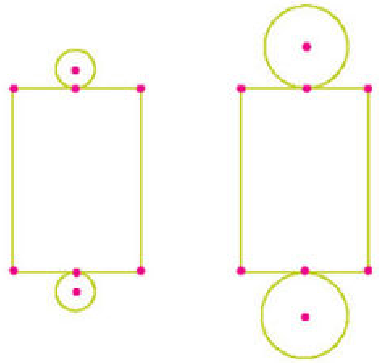


Figura 4.13

Describe por qué el otro desarrollo no representa el desarrollo de un cilindro con sus dos tapas.

Compara tus respuestas con las de otro compañero.

4 Construye tres rehiletes distintos de los que aparecen en el apartado **Situación problemática** y debajo de cada uno dibuja el cuerpo correspondiente al girarlos.

Muestra al grupo tus rehiletes y los cuerpos obtenidos al girar cada uno de ellos.

Lección 3

Valor de la pendiente de una recta, valor del ángulo que se forma con la abscisa y cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

En esta lección y en las dos siguientes aprenderás a reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados; a calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Por último, a resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

Conocimientos previos

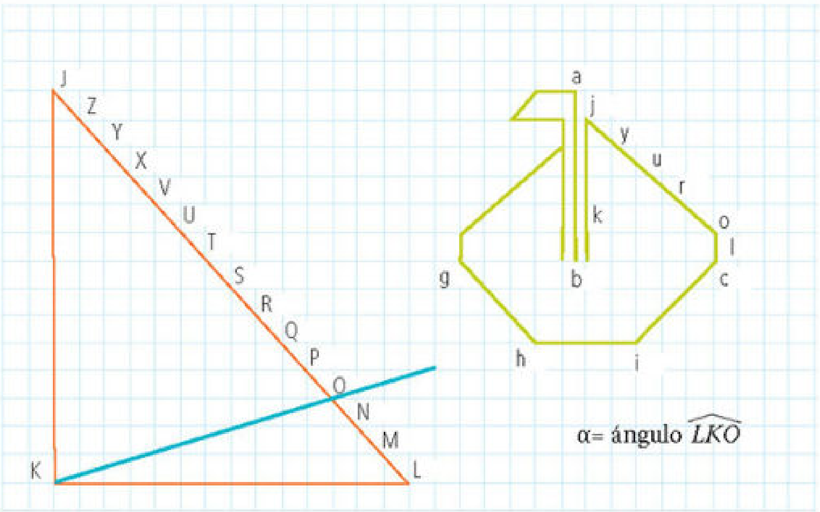


Figura 4.14

α= ángulo $\widehat{LKO}$

Con la vela del barco grande se quiere hacer una reproducción a escala 1 a 3 de la del barco pequeño del dibujo (Figura 4.14). Podemos calcular las pendientes de las rectas recordando que $\overleftrightarrow{KM}$ es la recta que va de K a M y

$$\text{Pendiente de la recta} = \frac{\textit{subido}}{\textit{avanzado}}$$

Contando cuadritos:

Pendiente $\overleftrightarrow{KM} = \frac{1}{13}$	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KQ}$ = ______
Pendiente $\overleftrightarrow{KN} = \frac{1}{12}$	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KR}$ = ______
Pendiente $\overleftrightarrow{KO}$ = ______	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KS}$ = ______
Pendiente $\overleftrightarrow{KP}$ = ______	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KT}$ = ______

Situación problemática

Recordemos que si las rectas tienen inclinaciones distintas (ángulos $\widehat{LKO}$, $\widehat{LKN}$, $\widehat{LKO}$, etc.), sus pendientes son diferentes. Vamos a relacionar la inclinación de cada recta con su pendiente. Llamaremos tangente del ángulo de inclinación a la pendiente de la recta. Así:

$$\textit{Pendiente de } \overleftrightarrow{KM} = \textit{tangente del ángulo } \widehat{LKM}$$

$$\textit{Pendiente de } \overleftrightarrow{KN} = \textit{tangente del ángulo } \widehat{LKN}$$

Glosario

Tangente del ángulo de inclinación: la pendiente de la recta tangente es la tangente del ángulo que forma esa recta con la horizontal.

Completa las expresiones siguientes:

Pendiente $\overleftrightarrow{KO}$ = tan $\widehat{LKN}$	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KR}$ = ______
Pendiente $\overleftrightarrow{KO}$ = tan $\widehat{\quad}$	*Pendiente* $\overleftrightarrow{KS}$ = ______

La tangente de un ángulo que se acerca cada vez más a 90º crece más y más.

tan $\widehat{LKT}$ *pendiente* $\overleftrightarrow{KT} = \frac{8}{5}$	tan $\widehat{LKU}$ *pendiente de* = ____ = ____
tan $\widehat{LKY}$ = ______ = ______	tan $\widehat{LKX}$ = ____ = ____
tan $\widehat{LKY}$ = ______ = ______	tan $\widehat{\quad}$ *pendiente de* $\overleftrightarrow{KZ}$ = ____

Comprendamos

Individual

¿Puedes completar lo siguiente acerca de segmentos del barquito pequeño sin necesidad de calcular (sólo contando cuadritos)?

$\tan \widehat{lko} =$ ______________ $\tan \widehat{lku} =$ ______________

$\tan \widehat{lkr} =$ ______________ $\tan \widehat{lky} =$ ______________

En la cuadrícula de la Figura 4.15 se ha trazado una recta que pasa por los puntos *A* y *B*; observa:

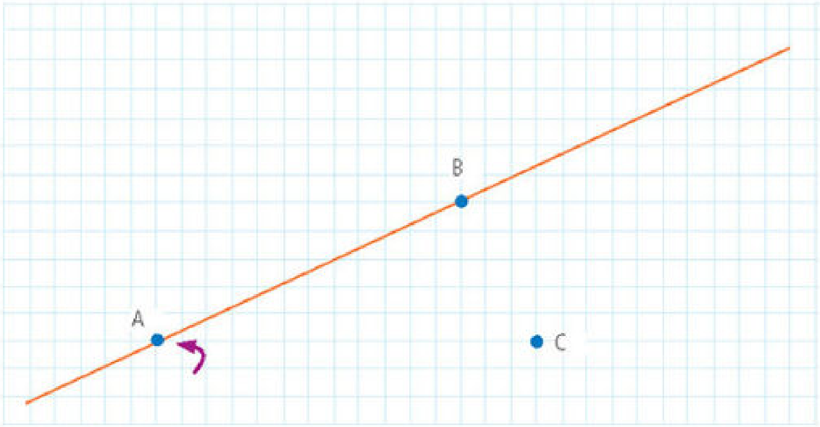


Figura 4.15

Calculamos la pendiente de esta recta de la siguiente manera:

$$\textit{pendiente de } \widehat{AB} = \frac{\textit{subido de A a B}}{\textit{avanzado de A a B}} = \frac{5}{\square}$$

En la figura anterior se señala con una flechita el ángulo *CAB*. Éste es el ángulo que forma la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con la recta horizontal que pasa por el punto *A*. Sabemos que:

$$\text{Tangente de } \widehat{CAB} = \textit{pendiente } AB$$

O sea que:

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{\textit{subido de AS}}{\textit{avanzado de A a S}}$$

Entonces,

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{\square}{10}$$

Fíjate en la Figura 4.16 y observa que:

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{\textit{lo que } \overline{DB}}{\textit{lo que } \overline{AD}}$$

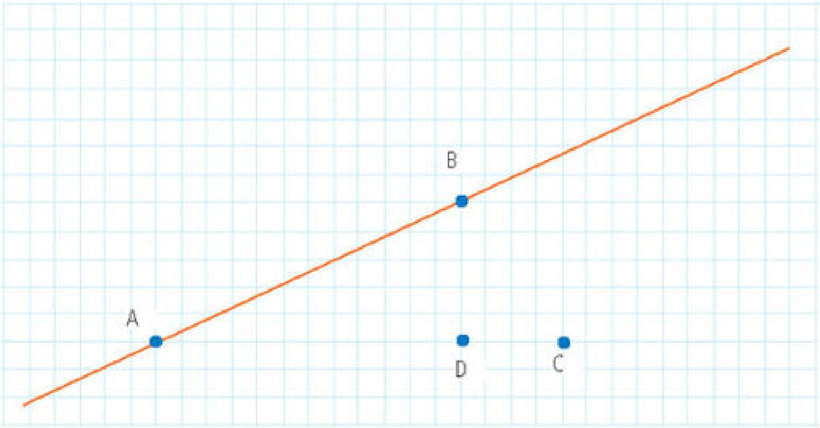


Figura 4.16

Integremos

Observa la cuadrícula de la Figura 4.16 para contestar lo siguiente:
¿El triángulo *ADB* es un triángulo rectángulo? ______________________
Marca con una flecha azul el ángulo de 90 grados de este triángulo.
Los catetos del triángulo *ADB* son $\overline{AD}$ y ______________________.
La hipotenusa es el segmento ______________________.

Para calcular la tangente del ángulo $\widehat{DAB}$ lo que hicimos fue:

$$\tan \widehat{DAB} = \frac{\textit{cateto } \overline{DB}}{\textit{cateto } \overline{AD}} = \frac{5}{\square}$$

En la Figura 4.17 se ha copiado la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el triángulo ADB. Toma otros puntos sobre la misma recta:

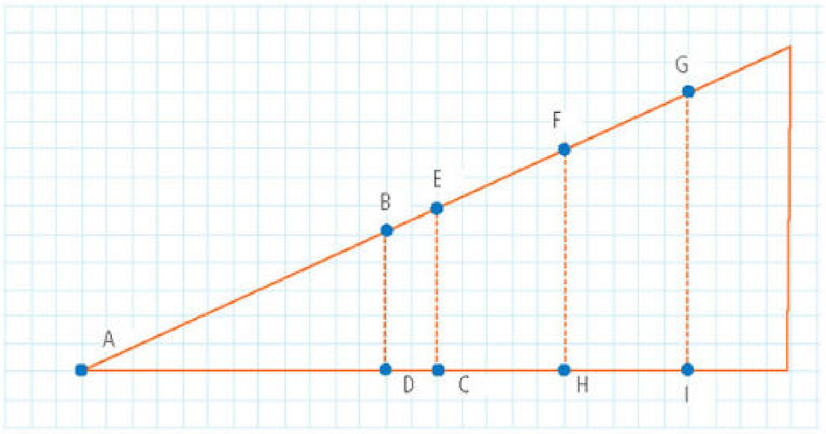


Figura 4.17

Recuerda que también se puede calcular la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ así:

$$\textit{pendiente de } \widehat{AB} = \frac{\textit{subido de A a E}}{\textit{avanzado de A a E}} = \frac{6}{\square}$$

En la figura anterior está señalado con el símbolo $\hat{a}$ el ángulo $\widehat{DAB}$.

La tangente de $\hat{a}$ también se puede calcular así:

$$\textit{tan pendiente } AB \ \widehat{DAB} = \frac{\textit{cateto } \overline{DB}}{\textit{cateto } \overline{AD}} = \frac{5}{\square}$$

Fíjate en el triángulo rectángulo ACE y nota que:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{subido de A a B}}{\textit{avanzado de A a B}} = \frac{\square}{10}$$

Se toma como referencia sobre la recta el punto F, la tangente $\hat{a}$ quedará así:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{subido de A a F}}{\textit{avanzado de \_\_\_\_ a \_\_\_\_}}$$

O sea que:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{cateto } \overline{FH}}{\textit{cateto } \_\_\_\_}$$

Tomando como referencia el punto G, tendremos:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{cateto } \_\_\_\_}{\textit{cateto } \_\_\_\_} = \frac{10}{\square}$$

En resumen: la observación de la figura anterior deja ver que para calcular $\tan \hat{a}$ se usan distintos triángulos rectángulos. Compara los resultados. Observa la Figura 4.18 y completa lo que se pide:

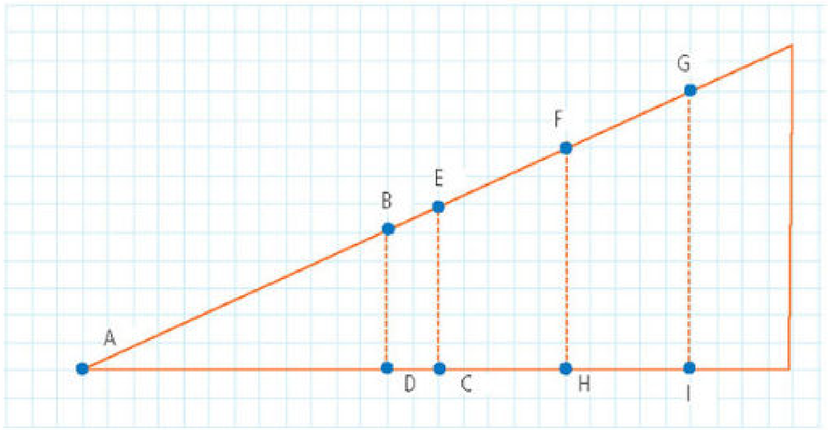


Figura 4.18

En el triángulo ABD:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{cateto } \overline{DB}}{\textit{cateto } \overline{AD}} = \frac{\square}{\square}$$

En el triángulo ACE:

$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{cateto } \overline{BC}}{\textit{cateto } \_\_\_\_} = \frac{\square}{12}$$

En el triángulo AHF:

$$\tan \widehat{a} = \frac{\text{cateto } \_\_\_\_}{\text{cateto } \overline{AB}} = \frac{8}{\square}$$

En el triángulo *AIG*:

$$\tan \widehat{a} = \frac{\text{cateto } \_\_\_\_}{\text{cateto } \_\_\_\_} = \frac{\square}{\square}$$

Convierte en medios las fracciones que obtuviste:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \frac{8}{16} = \frac{\square}{2}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{\square}{2} \qquad \frac{10}{20} = \frac{\square}{\square}$$

Todas las fracciones anteriores son equivalentes a $\frac{\square}{\square}$.

O sea que al calcular $\tan \widehat{a}$ usando cualquiera de los triángulos rectángulos de la figura anterior el resultado es el mismo.
¿Crees que se dibujan más triángulos rectángulos de esta manera el resultado será el mismo? ______________________________

En todos los casos anteriores obtuvimos la tangente $\widehat{a}$ dividiendo el cateto opuesto a $\widehat{a}$ entre el cateto adyacente a $\widehat{a}$. Esto se puede hacer aunque el dibujo no esté en la cuadrícula.

Apliquemos

Individual

1 Observa la Figura 4.19.

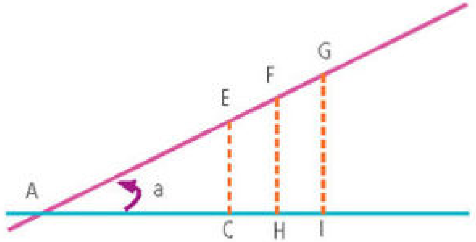


Figura 4.19

Usa una regla y completa la Tabla 4.10.

Cateto opuesto a $\widehat{a}$	Cateto adyacente a $\widehat{a}$	$\frac{cat.\ op.}{cat.\ ady.}$	Tan $\widehat{a}$
$\overline{EC}$ = ______ *cm.*	$\overline{AC}$ = ______ *cm.*	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
$\overline{FH}$ = ______ *cm.*	______ *cm.*	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
______ *cm.*	______ *cm.*	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$

Tabla 4.10

La tangente de un ángulo es un número que se puede calcular usando un triángulo formado por los lados del ángulo.

2 En la Figura 4.20 está dibujado un ángulo llamado $\widehat{m}$.

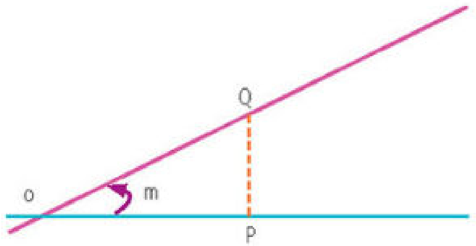


Figura 4.20

Para calcular la tangente de $\widehat{m}$:
Primero marca un punto *P* sobre uno de los lados; después traza una recta perpendicular por el punto *P*, que aquí se ha dibujado punteada. Llamamos *Q* al punto en que corta el otro lado del ángulo.
¿El triángulo *OPQ* es un triángulo rectángulo? ________________.

¿Cuáles son sus catetos? ________________ y ________________

Con una regla, mide el segmento $\overline{OP}$ = __________ cm.

Ahora mide el segmento $\overline{PQ}$ = ____________________ cm.

La tangente de $\widehat{m}$ es igual a $\dfrac{cateto\ PQ}{cateto\ OP}$

Es decir, tan $\widehat{m}$ _________ = ________

3 Otro caso puede ser que de un triángulo rectángulo se pida calcular la tangente de alguno de sus ángulos agudos.

Calcular tan $\widehat{r}$.

El cateto opuesto a $\widehat{r}$ es: $\overline{LM}$.

El cateto adyacente a $\widehat{r}$ es tan $\widehat{r} = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

O sea, tan $\widehat{r}$ = tan $\widehat{a} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{LN}}$ = 3, porque $\overline{LM}$ es igual a $\overline{LN}$ (Figura 4.21)

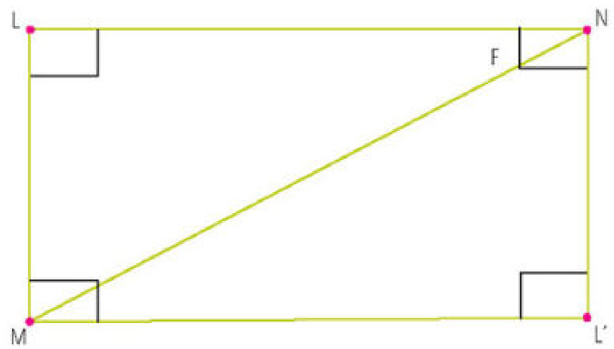


Figura 4.21

Ángulos agudos y cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

4 Lección

Conocimientos previos

Sin usar transportador se puede saber cuánto mide el ángulo $\widehat{r}$ grados (Figura 4.22).

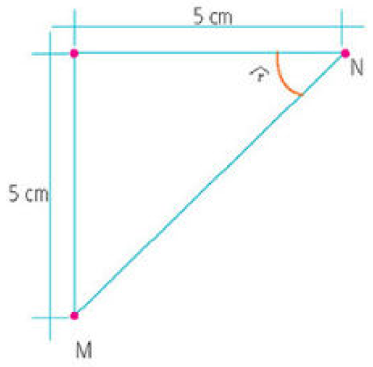


Figura 4.22

Con la copia el triángulo rectángulo *LMN* se completa un rectángulo colocando otro triángulo igual, como se muestra en la Figura 4.23.

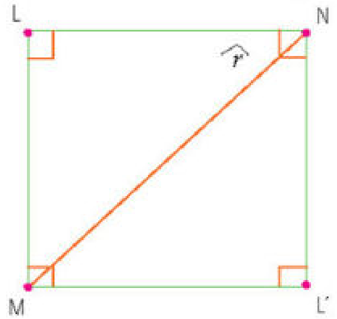


Figura 4.23

Observa el ángulo $\widehat{MLN}$ = _______ grados, porque es un ángulo recto.

El ángulo $\hat{r}$ es la mitad del triángulo $\widehat{LNM}$ o sea que:

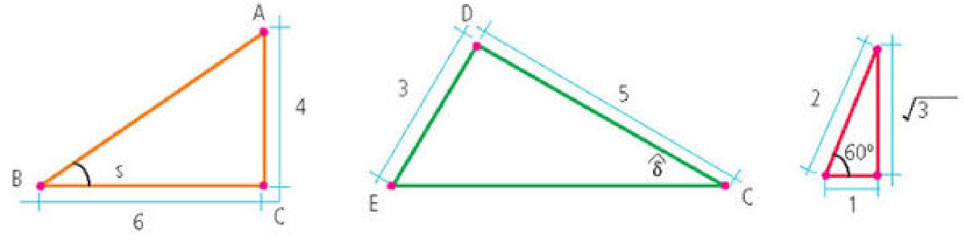
$$\hat{r} = \_\_\_\_\_\_ \text{ grados.}$$

Se ha obtenido que:

$$\tan 45° = 1$$

Observa la Figura 4.24 y contesta lo siguiente:

Figura 4.24



$\tan\beta = \dfrac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \_\_\_\_\_\_$ $\quad \tan\delta = \dfrac{\overline{ED}}{\textit{cateto adyacente}} = \_\_\_\_\_\_$ $\quad \tan\widehat{60} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Situación problemática

Individual

Dos amigos desean medir la altura de una antena. Aunque no tienen una escalera tan alta, disponen de un aparato para medir ángulos. Observa la Figura 4.25:

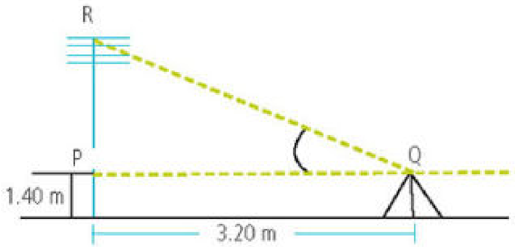


Figura 4.25

El aparato está colocado a una altura de 1.40 m del piso y a una distancia de ______m del pie de la antena. Al medir con el aparato el ángulo $\widehat{PQR}$ encontraron que $\widehat{PQR} = 45°$ Observa el triángulo $\widehat{PQR}$, que es un triángulo rectángulo. Primero encontraron cuánto medía el segmento $\overline{PR}$ y anotaron los siguientes datos:

$\widehat{PQR} = \_\_\_\_\_\_ \; m$ $\qquad \widehat{PQR} = \_\_\_\_\_\_$

La incógnita es $\overline{PR}$.
La ecuación que usaron es:

$$\tan 45° = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$$

Sustituye los datos de la ecuación: O sea que:

$1 = \dfrac{\overline{PR}}{\boxed{}}$ $\qquad 1 \; \boxed{} = \overline{PR}$

$\uparrow$ tan 45° $\quad \uparrow$ $\overline{PQ}$ en metros $\qquad$ tan 45° $\uparrow$ $\overline{PQ}$ en metros $\uparrow$ $\overline{PQ}$ = ______ m

Encontraron que la altura de la antena es:

$\overline{PR} + 1.40 = \_\_\_\_\_\_ \; m$

Comprendamos

Observa la Figura 4.26 y escribe los cocientes que se te piden (las marcas en el dibujo corresponden a centímetros).

Individual

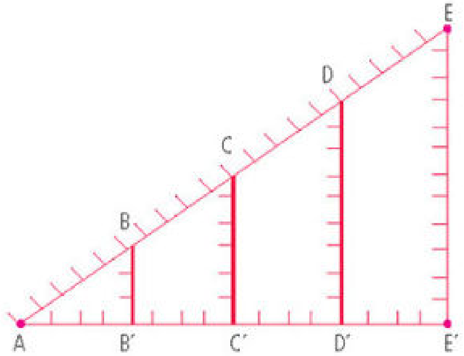


Figura 4.26

$\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{3}{\boxed{}}$ $\quad \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\boxed{}}{10}$ $\quad \dfrac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \_\_\_\_\_\_$ $\quad \dfrac{\overline{EE'}}{\overline{AE}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Encuentra la forma decimal de cada una de esas fracciones haciendo la división.

$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = 0.75$ $\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \square$ $\frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \square$ $\frac{\overline{EE'}}{\overline{AE}} = \square$

Como puedes notar, el resultado es el mismo.

Integremos

Individual

1 Hagamos algunas observaciones sobre el dibujo y los resultados que obtuviste. Para ello veamos la Figura 4.27:

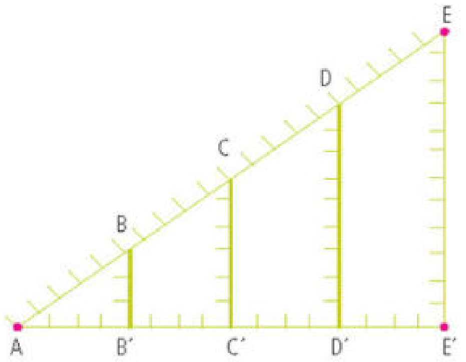


Figura 4.27

Los lados del ángulo $\hat{a}$ son las rectas $\overline{AE'}$ y $\overline{AE}$. Con los lados de este ángulo se han trazado varios triángulos rectángulos. Lo que se hizo con cada triángulo fue dividir lo que mide el *cateto opuesto a* $\hat{a}$ entre *la hipotenusa*.

En el triángulo *ABB'*, el cateto opuesto a $\hat{a}$ es *BB'* y la hipotenusa es: ________
____.

En el triángulo *ADD'*, el cateto opuesto a $\hat{a}$ es ________ y la hipotenusa es:
____.

$$\frac{\textit{cateto opuesto a } \hat{a}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{A'}} =$$

Puedes calcular esta misma relación con los otros triángulo rectángulos: *ACC'* y *AEE'*. Observarás que el resultado es el mismo. Es más, si se trazara otro triángulo rectángulo con los lados de este mismo ángulo $\hat{a}$ encontraríamos que: sigue siendo 0.60, igual a los anteriores.

2 A continuación dibuja un ángulo que se llame $\hat{b}$ (Figura 4.28).

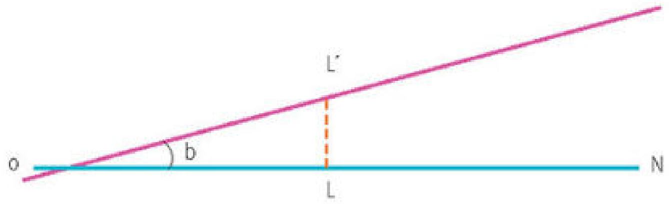


Figura 4.28

Por el punto *L* hemos trazado una recta perpendicular a $\overrightarrow{BN}$ formamos el triángulo *BLL'*. Mide con una regla:

$\overline{LL'}$ = __________ m $\overline{BL'}$ = __________ m

$$\frac{\overline{LL'}}{\overline{BL'}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

O sea que en el triángulo *BLL'*:

$$\frac{\textit{cateto opuesto a } \hat{b}}{\textit{hipotenusa}} = \_\_\_\_$$

3 En seguida copiamos el mismo ángulo $\hat{b}$ pero formamos otros triángulos rectángulos con sus lados (Figura 4.29).

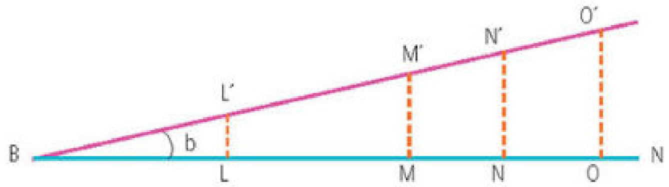


Figura 4.29

Completa la Tabla 4.11. Usa una regla para medir los segmentos que se te piden.

Tabla 4.11

Triángulo	cateto opuesto a $\hat{b}$	hipotenusa	$\frac{\text{cateto opuesto a } \hat{b}}{\text{hipotenusa}}$
BMM'	$\overline{MM'}$ = ______cm	$\overline{BM'}$ = ______cm	
BNN'	= ______cm	= ____cm	
BLL'	= ______cm	= ____cm	
BOO'	= ______cm	= ____cm	

Seguramente ya notaste que en la última columna se obtiene el mismo resultado para cada renglón. A este número lo llamaremos seno del ángulo $\hat{b}$, es decir:

El seno del ángulo $\hat{b}$ *es igual a sen* $\hat{b}$

4 Recuerda el primer ejemplo de "Integremos": al calcular en cada triángulo obteníamos el mismo número, 0.60 (Figura 4.30).

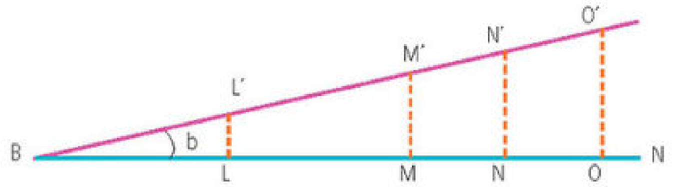


Figura 4.30

Diremos que el seno del ángulo $\hat{a}$ es igual a 0.60; abreviando:

$$sen\ \hat{a} = 0.60$$

Como lo hicimos en los ejemplos anteriores, para calcular el seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se divide lo que mide el cateto opuesto al ángulo entre la hipotenusa.

$$\textit{seno de un ángulo en triángulo rectángulo}\ \frac{\textit{cateto opuesto a } \hat{a}}{\textit{hipotenusa}} = \_\_\_\_$$

Apliquemos

Individual

1 Utilizando la igualdad anterior, encuentra el seno de los ángulos presentados en la Figura 4.31:

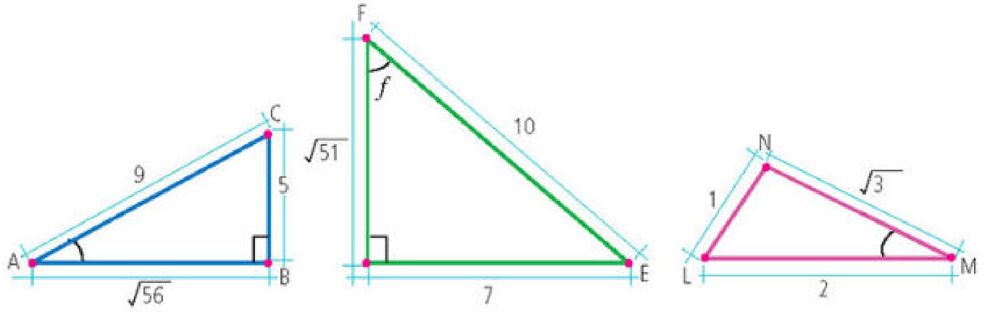
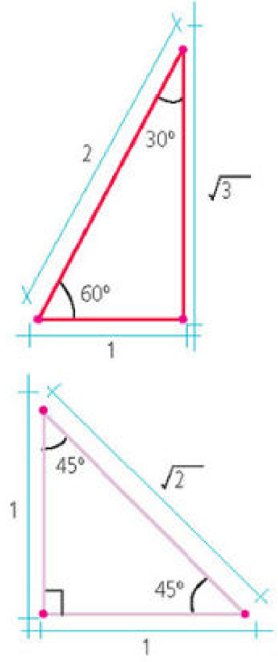


Figura 4.31

$sen\ \hat{a} = \_\_\_\_$ $\quad sen\ \hat{f} = \dfrac{\_\_\_\_}{10}$ $\quad sen\ 30° = \_\_\_\_$

2 Con las igualdades resueltas antes y observando cada uno de los triángulos rectángulos siguientes, completa la Figura 4.32.



$tan\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ $\qquad tan\ 30° = \_\_\_\_$

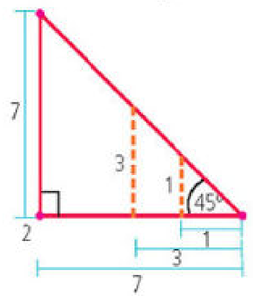
$sen\ 60° = \dfrac{\_\_\_\_}{2}$ $\qquad sen\ 30° = \dfrac{1}{\_\_\_\_}$

$tan\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \_\_\_\_$

$sen\ 60° = \dfrac{\_\_\_\_}{\sqrt{2}}$

Figura 4.32

3 Se puede calcular tanto la tangente como el seno de un ángulo usando cualquier triángulo rectángulo formado por los lados del ángulo. Por ejemplo, es posible formar varios triángulos con ángulos de 45 grados. Así se puede calcular de varias formas la tangente de 45 grados, como se muestra en la Figura 4.33.



$tan\ 45° = \dfrac{1}{1} = \_\_\_\_$

$sen\ 45° = \dfrac{3}{\_\_\_\_}$

$sen\ 45° = \dfrac{\_\_\_\_}{7}$

Figura 4.33

Lo mismo sucede con el seno de 45 grados: puede usarse cualquiera de los triángulos rectángulos formados por los lados del triángulo de 45 grados, pero esto ya no se hará.

Hasta aquí hemos calculado:

$tan\ 30° = \_\_\_\_$ $\qquad sen\ 30° = \_\_\_\_$

$tan\ 60° = \dfrac{\_\_\_\_}{2}$ $\qquad sen\ 60° = \_\_\_\_$

Lección

5 Explicitación y uso de seno, coseno y tangente

Conocimientos previos

En el triángulo rectángulo de la Figura 4.34 se han escrito las medidas de sus lados y se ha indicado a uno de los ángulos agudos. Encuentra la tangente y el seno del ángulo α.

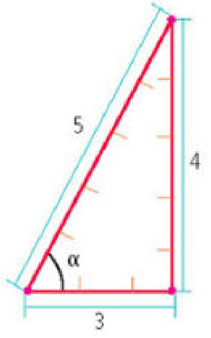


Figura 4.34

$\tan \alpha = \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$ $\quad\quad$ $\operatorname{sen} \alpha = \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$

Con este ejercicio recordarás que para calcular la tangente de un ángulo en un triángulo, se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente; es decir:

$$\text{tangente de un ángulo agudo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Y para calcular el seno del ángulo, se divide el cateto opuesto entre la hipotenusa, en otras palabras:

$$\text{seno de un ángulo agudo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Observa el triángulo anterior y calcula lo siguiente:

$$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \underline{\quad\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad\quad}$$

Situación problemática

Ahora copia el ángulo α, pero prolongando sus lados de modo que podamos trazar más triángulos rectángulos. Observa la Figura 4.35:

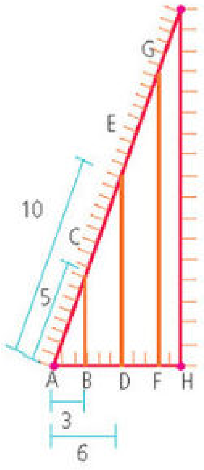


Figura 4.35.

Completa la Tabla 4.12.

En el triángulo	El cateto adyacente a α mide	La hipotenusa mide	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
ABC	3	5	$\frac{3}{5}$
ADE		10	
AFG			
AHI			

Tabla 4.12

Convierte en decimales las fracciones de la última columna:

$\frac{3}{5} = 0.6 \quad\quad \frac{6}{10} = \underline{\quad\quad} \quad\quad \frac{9}{15} = 0.6 \quad\quad \frac{12}{20} = \underline{\quad\quad}$

¿Cómo son los resultados entre sí? ______________________.

Si se prolongan más los lados del ángulo α y se traza más triángulos rectángulos, ¿al dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa seguirías obteniendo como resultado 0.6? ______.

Comprendamos

Glosario

Coseno de un ángulo: el coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la razón de la longitud del cateto adyacente al ángulo a la longitud de la hipotenusa.

La respuesta es sí, seguirías obteniendo 0.6; este número 0.6 se llama coseno del ángulo α. El coseno de α se abrevia así: cos α.

Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

De aquí en adelante, cada vez que se pida calcular el coseno de un ángulo, traza con sus lados un triángulo rectángulo y haz la división.

$$\frac{\text{cateto adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$$

Integremos

Individual

1 Veamos en otro ejemplo que no importa el tamaño del triángulo usado para calcular el coseno, siempre y cuando el triángulo rectángulo esté construido con los lados del ángulo.

Observa la Figura 4.36.

Con los lados del ángulo β se han trazado varios triángulos rectángulos: *OPQ*, *ORS*, _______ y _______.

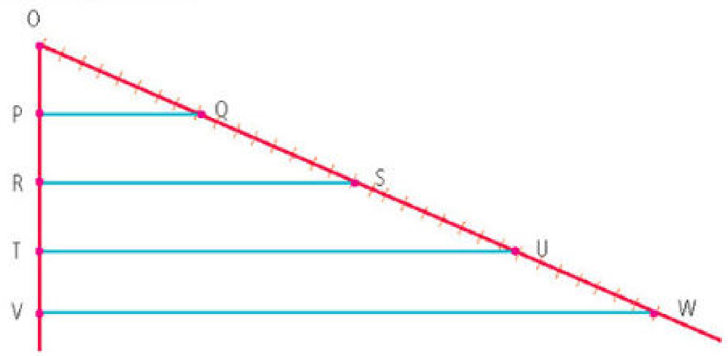


Figura 4.36

Completa:
En el triángulo *OPQ*, $\frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{9}$

En el triángulo *ORS*, $\frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \rule{2em}{0.4pt}$

En el triángulo *OTU*, $\frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \rule{2em}{0.4pt}$

El triángulo *OVW*, ¿puedes completar lo siguiente?

En el triángulo *OVW*, $\frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{16}{\rule{2em}{0.4pt}}$

Representarán el mismo número todas las fracciones que obtuviste,

$$\frac{4}{9}, \frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \rule{2em}{0.4pt}.$$

Puedes comprobar lo anterior si conviertes cada fracción en decimal. Hazlo calculando sólo 3 decimales:

$$\frac{4}{9} = 0.444 \qquad \frac{8}{18} = \rule{2em}{0.4pt} \qquad \frac{12}{27} = \rule{2em}{0.4pt} \qquad \frac{16}{36} = \rule{2em}{0.4pt}$$

aproximadamente.

Al número 0.444... lo llamaremos coseno del ángulo β; en otras palabras:

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = 0.444$$

Puesto que los resultados son todos iguales, para calcular el coseno de β se pudo haber usado cualquiera de los triángulos *OPQ*, *ORS*, ______ o ______, o bien, cualquier otro triángulo rectángulo dibujado con los lados de β.

1 Ahora puedes resumir lo que has aprendido acerca de los ángulos agudos. Hemos visto que a cada ángulo agudo se le pueden asignar tres números. Así, si dibujas un ángulo agudo δ, puedes dibujar un triángulo rectángulo con sus lados y calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo δ (Figura 4.37).

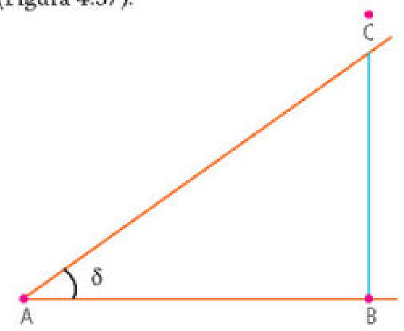


Figura 4.37

$$sen\ \delta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad sen\ \delta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad sen\ \delta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$sen\ \delta = \frac{BC}{10} \qquad sen\ \delta = \_\_\_\_ \qquad tan\ \delta = \_\_\_\_$$

Si supiéramos las medidas de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, obteniendo los cocientes de la derecha se obtendrían tres números, a saber: el seno de δ, el coseno de δ y la _________de δ.

Individual

Apliquemos

1 Del hexágono regular que se muestra en la Figura 4.38 sólo se conoce la medida del ángulo α y el segmento $\overline{OP}$.

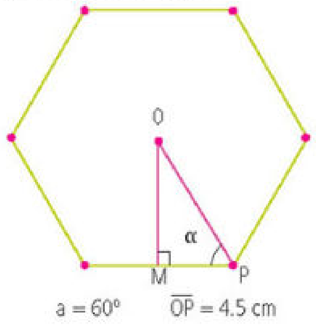


Figura 4.38

¿Cuánto mide el lado del hexágono?______
Puesto que el segmento $\overline{MP}$ es la mitad de un lado del hexágono, para conocer la medida de un lado, basta con encontrar la medida de $\overline{MP}$ y multiplicarla por 2.

a) ¿El triángulo *OMP* es un triángulo rectángulo? ____________.
b) Los datos del problema son: =__________°.
OP = __________ cm
c) La incógnita es el segmento____________.
d) ¿Cuál de las igualdades siguientes usarías para encontrar la medida de $\overline{MP}$?, márcala con una cruz.

$$sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad sen\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad tan\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Si se conoce α y la hipotenusa y buscas el cateto adyacente a α, la igualdad que debes usar es la del coseno.

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \qquad \begin{array}{l} \leftarrow \text{buscamos el cateto adyacente} \\ \leftarrow \text{lo conocemos} \end{array}$$

Al sustituir los datos en esta igualdad, se obtiene:

$$cos\ 60° = \frac{\square}{\square\ cm}$$

Más adelante verás que cos 60° = 0.5; entonces sustituyendo este dato:

$$0.5 = \frac{\overline{MP}}{4.5\ cm}$$

Así que $\overline{MP}$ = __________cm.

El lado del hexágono es 2 $\overline{MP}$ = __________ cm.

En la Figura 4.39 observa que el lado del hexágono mide lo mismo que el segmento $\overline{OP}$ =.

Dibuja el círculo que pasa por los vértices del hexágono y que tiene su centro en O. Este círculo se llama *círculo circunscrito al hexágono*.

El segmento $\overline{OP}$ es el radio de este círculo.

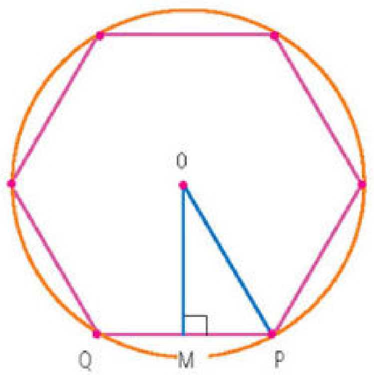


Figura 4.39

2 Si la persona tiene un aparato para medir el ángulo que forma la torre con la línea punteada, ¿podrá conocer la distancia que hay de la torre a su casa? __________. Supongamos que la persona midió el ángulo y encontró que era igual a 60°. Observa la Figura 4.40.

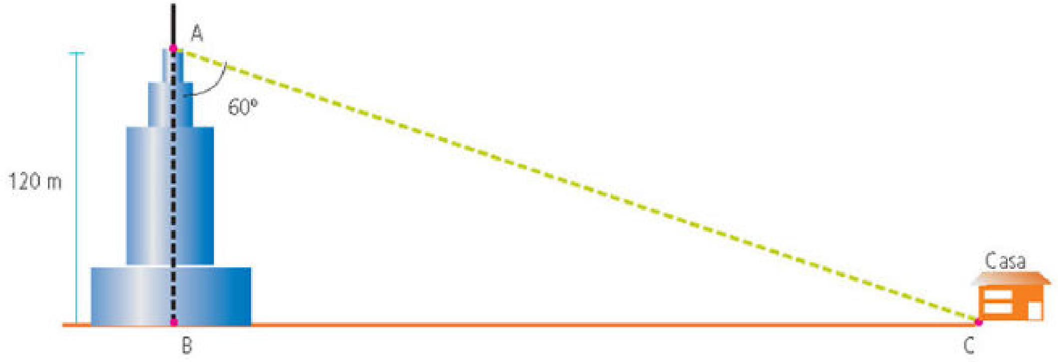


Figura 4.40

a ¿El triángulo ABC es un triángulo rectángulo? __________.
El cateto opuesto del ángulo de 60° es $\overline{BC}$.

b El cateto adyacente al ángulo de 60° es ___.

c La distancia de la torre a la casa es lo que mide el cateto _______.

Recuerda que:

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto a } 60^\circ}{\text{cateto adyacente a } 60^\circ} = \frac{\overline{BC}}{}$$

O sea que,

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{120}$$

Podemos ver que tan 60° =1.7320

Así que:

$$\frac{\overline{BC}}{120} = 1.7320$$

Entonces, $\overline{BC}$ = _______ _________ = _______ m.

3 Usa las igualdades enmarcadas y observa cada uno de los triángulos siguientes (Figuras 4.41 y 4.42) para completar:

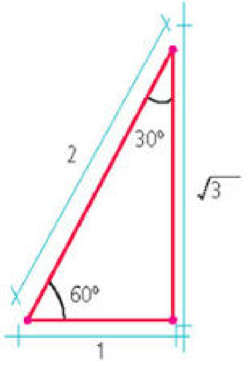


Figura 4.41

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{}$ $\qquad$ $\tan 30^\circ =$ ____

$\sin 60^\circ = \frac{}{2}$ $\qquad$ $\sin 30^\circ = \frac{1}{}$

$\cos 60^\circ =$ ____ $\qquad$ $\cos 30^\circ =$ ____

$\tan 45^\circ =$ ____

4 Calcula lo siguiente:

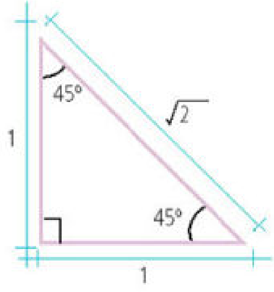


Figura 4.42

$\text{sen } 45^\circ = \frac{\square}{\square}$

$\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$

Lección 6

Variación lineal y la pendiente de una recta

En esta lección aprenderás a analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.

Conocimientos previos

Los rarámuris, "los de los pies ligeros", viven en la Sierra Tarahumara, que se encuentra en la Sierra Madre Occidental, al suroeste del estado de Chihuahua. Tienen fama de ser buenos corredores de fondo y a partir de la década de los noventa han participado en ultramaratones. En 1994, un grupo de ellos compitió en la carrera estadounidense 100 Millas de Leadville; siete corredores rarámuris quedaron en los 11 primeros lugares.

Juan Herrera, un rarámuri de 25 años, ganó en 1994 el primer lugar recorriendo las 100 millas (160.93 km) en 17 horas 40 minutos. Esta marca duró 11 años y fue superada por Matt Carpenter en 2005, con un tiempo de 15 horas y 42 minutos.

La carrera se lleva a cabo anualmente en las montañas Rocallosas, en un circuito cerrado de Leadville a Winfield y de regreso a Leadville. La Figura 4.43 y la tabla de valores (Tabla 4.13) que aparecen a continuación muestran la altura sobre el nivel del mar de seis puertos donde los corredores pueden hidratarse, cambiarse de ropa y comer algo para continuar su recorrido.

Figura 4.43

Puerto	Millas recorridas en el circuito	Altura m/snm
Leadville	0	3079
Mary Queen	13.5	3018
Fish Hatchery	23.5	3200
Half Moon	30.5	3018
Twin Lakes	39.5	2865
Hopepass	44.5	3810
Winfield	50.0	3109
Hopepass	55.5	3810
Twin Lakes	60.5	2865
Half Moon	69.5	3018
Fish Hatchery	76.5	3200
Mary Queen	86.5	3018
Leadville	100.0	3079

Tabla 4.13

Individual

1 ¿A cuántas horas de iniciar la carrera llegó Juan por primera vez a Fish Hatchery? ______________________________

2 De regreso a Leadville, ¿a las cuántas horas del principio de la carrera estuvo Juan en Hopepass? ______________________________

3 ¿Entre qué puertos se encontraba Juan a las 13 horas 45 minutos de haber empezado a correr? ______________________________

4 La carrera empezó a las 5:30 a.m. De regreso en Half Moon Juan debe cambiarse de ropa. ¿A qué hora debe encontrarse el equipo de apoyo del corredor en esa ubicación? ______________________________

5 Intercambien ideas acerca de la información que tienen para responder las preguntas anteriores. Averigüen si tienen todos los datos y completen lo que sigue.

a ¿Cuáles de las variables que intervienen en la carrera de Juan son necesarias para responder las preguntas? ______________________________

b De entre las variables que eligieron, ¿cuál es la variable dependiente? ______________, ¿y la independiente? ______________.

c En esta situación, el mayor valor que la variable dependiente puede tener es __________ y ________ es el menor valor que puede tener esa variable.

d En la carrera de Juan, el mayor valor que puede tomar la variable independiente es _________ y _________ es el menor valor que esta variable puede tener.

6 Para encontrar una posible respuesta a las preguntas anteriores puede usarse una representación de la carrera de Juan.

Abran el programa Graphmatica (www.graphmatica.com/espanol); seguro lo tienen instalado en las computadoras de la sala de medios.

Situación problemática

Pareja

Al abrir el programa, aparece en la pantalla una imagen de una parte del plano cartesiano. Seguramente se acuerdan que puede modificarse para que cumpla con los requerimientos de la situación que van a estudiar.

1 ¿Cuál es el eje que representará el tiempo transcurrido? __________. ¿Cuál es el eje que representará la distancia recorrida por Juan en la carrera? ______________________________

2 Opriman el botón Ver y al desplegarse la cascada elijan Rango de cuadrícula. ¿Qué es conveniente poner en la ventana Izquierda? _______ ¿Qué es conveniente poner en la ventana Derecha? ______ ¿Qué les conviene poner en la ventana Arriba? _________ ¿y en la ventana Abajo? ______________________________.

Acuérdense que también pueden elegir el color y el símbolo que se usarán en el programa para localizar los puntos que ustedes le indiquen.

3 En la tabla de valores que aparece a la derecha de la pantalla pongan las coordenadas de los puntos (0, 0) y (17.67, 160.93). ¿Qué representa cada uno de estos puntos? ______________________________

4 Al oprimir el botón Ajustar curva, ¿qué acción ejecutará el programa? ________. ¿Por qué? ______________________________

Verifiquen su hipótesis; opriman el botón. Deben tener una pantalla parecida a la que se muestra en la Figura 4.44, que se ubica en la siguiente página.

La curva que sugiere el programa es una línea recta que pasa por el origen (0, 0) y el punto (17.67, 160.93), que están indicados en azul.

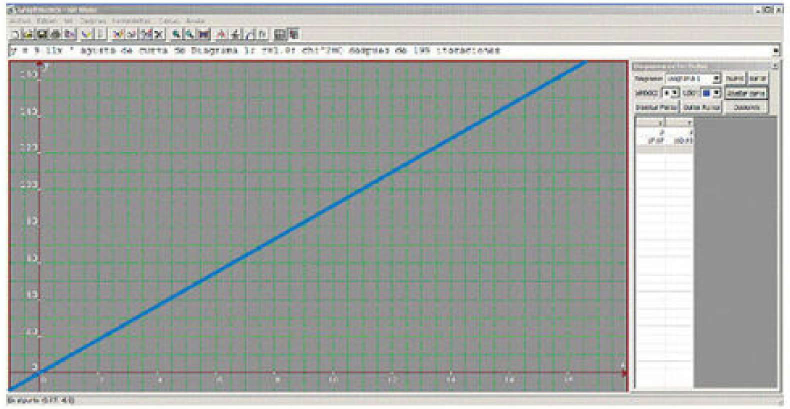


Figura 4.44

Observen que en la parte superior de la gráfica aparece una leyenda que empieza como sigue:

y = 9.11x 'ajuste de curva Diagrama 1; …

5 ¿Qué representa la expresión algebraica y = 9.11x? ____________________

____

Para x = 1, ¿cuánto vale y? ______

Pon esos valores en la tabla de Graphmatica y oprime Enter. En la pantalla aparece el punto de coordenadas (1, 9.11), ¿qué simboliza este punto en la situación que se está representando en la computadora? ________

____

6 Completen la siguiente oración:

Con la representación lineal de la carrera de Juan Herrera, en promedio, él corrió cada hora ______ kilómetros.

Recordarán que la tabla de valores, la gráfica y la expresión algebraica son elementos para representar y estudiar una situación.

En el caso de la carrera de Juan en la Montañas Rocallosas, estos tres elementos sirven para contar con una explicación del movimiento del corredor en el circuito de las 100 millas de Leadville.

7 Describan el movimiento representado por la recta y la expresión algebraica y = 9.11x: ____________________________________

8 Mencionen tres factores que no se toman en cuenta en esta representación del desplazamiento de Juan por el circuito y que afectan su manera de correr ____________, ______________ y ____________.

Compartan con el resto de sus compañeros sus respuestas y lleguen a un consenso. Revisen lo que escribieron y modifiquen sus contestaciones si es necesario.

Comprendamos

Grupo

Entre todos, empiecen a recuperar de la gráfica los valores que toman las variables dependiente e independiente. Para ello muevan el cursor sobre la recta y localicen los puntos necesarios para hacer lo que se pide. Asegúrense que los puntos estén sobre la recta.

1 ¿Qué distancia en kilómetros ha recorrido Juan a las 2 horas? ________.
Pon las coordenadas de ese punto en la tabla de valores y oprime Enter. ¿Quedó el punto indicado sobre la recta? _________.

2 A las 4 horas de iniciada la carrera, ¿cuál es la distancia que ha recorrido Juan de acuerdo con la representación que hemos hecho? __________.

3 ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando Juan recorrió ya 54.66 km?

____.

4 A las 16 horas de iniciada la carrera, ¿a qué distancia está Juan de llegar a la meta? _________.

Usen este procedimiento para completar la Tabla 4.14; es una copia de la Tabla 4.13. Localicen los puntos en la gráfica en la computadora. Contesten las preguntas.

Recordarán que una tabla como la que acaban de completar es una tabla de variación: representa la manera cómo varían dos cantidades o magnitudes cuando el valor de una de ellas depende del valor de la otra. En este caso, la distancia recorrida, representada por y, depende del tiempo transcurrido, representado por x.

x Tiempo transcurrido en horas	y Distancia recorrida en kilómetros
0	0
17.67	160.93
1	9.11
2	
4	54.66
8	
	90.11
12	
14	
16	

Tabla 4.14

5 ¿El tiempo transcurrido y la distancia recorrida son dos magnitudes que se relacionan proporcionalmente? ______ ¿Por qué? ______________

____

De aquí en adelante escribiremos la distancia recorrida en 2 horas como $y(2) = 18.2$ km; es decir, $y(2)$ representa el valor de $y = 9.11x$, cuando $x = 2$ o, dicho de otra forma, cuando han transcurrido 2 horas.

6 Contesten las siguientes preguntas tomando en cuenta los datos de la tabla:

a) ¿Cuál es el valor de $y(4)$? _____. ¿Cuál es el valor de $y(10)$ ________

b) ¿Qué distancia recorrió Juan entre las 2 y las 4 horas? ___________

c) ¿Qué distancia recorrió Juan entre las 12 y las 14 horas? _________

d) ¿Qué distancia recorre Juan entre las 5 y media horas y las 7 y media horas? ______________________________

e) Supón que Juan sigue corriendo, ¿qué distancia recorrería entre la hora 23 y la hora 25? ____________________________

f) ¿Qué distancia recorre Juan en cualquier lapso de 2 horas durante su carrera? ______________________________

La distancia recorrida entre las 2 y las 4 horas puede calcularse mediante la expresión:

$$y(4) - y(2) = 36.4 - 18.2 = 18.2$$

Esta diferencia se llama **incremento de la distancia**.

g) Calculen los siguientes incrementos de la distancia en el caso de la carrera de Juan:

$y(6) - y(4) =$ _____ $y(16) - y(8) =$ _____

$y(5\ 1/2) - y(3\ 1/2) =$ ____ $y(12\text{ h }40\text{ min}) - y(7\text{ h }15\text{ min}) =$

$y(180\text{ min}) - y(15\text{ min}) =$ __ $y(12) - y(7\ 3/4) =$ ___

h) Fíjense en la tabla de valores que completaron. En la parte que está coloreada de rosa, a partir del punto con coordenadas (2.0, 18.2) se han hecho incrementos iguales en el tiempo transcurrido que van de 2 en 2. ¿Cómo describirían los incrementos en la distancia recorrida?

____

____

i) Usen los resultados que obtuvieron antes para calcular los siguientes cocientes:

$$\frac{y(6) - y(4)}{6 - 4} = \_\_\_\_$$

$$\frac{y(16) - y(8)}{16 - 8} = \_\_\_\_$$

$$\frac{y(5\frac{1}{2}) - y(3\frac{1}{2})}{5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}} = \_\_\_\_$$

$$\frac{y(12h40) - y\ 18(7h15)}{12h40 - 7h15}$$

$$\frac{y(12) - y(7\frac{3}{4})}{12 - 7\frac{3}{4}} = \_\_\_\_$$

$$\frac{y(180min) - y(15min)}{180min - 15min} = \_\_\_\_$$

Comparen todos juntos los resultados y comenten lo que observaron al hacer los cálculos.

En la representación de la carrera de Juan Herrera como un línea recta al cociente:

$$\frac{\textit{incremento en la distancia}}{\textit{incremento en el tiempo}}$$

se le llama **razón de cambio**; esta razón es __________ y tiene el valor ______.

Entre todos lleguen a un consenso acerca de las diferencias y similitudes entre la constante de proporcionalidad y la razón de cambio. Escriban sus conclusiones:

____

____

____

____

Comprendamos

Grupo

En la pantalla de Graphmatica tienen una representación similar a la que se muestra en la Figura 4.45.

Observen que los puntos sobre la recta se encuentran a intervalos iguales de tiempo transcurrido y corresponden a incrementos iguales de distancias recorridas. Fíjense que para ir del punto A al punto C se avanzan 2 unidades de tiempo sobre una línea horizontal paralela al eje X hacia el punto B y se suben 18.2 unidades de distancia sobre una línea vertical paralela al eje Y hacia el punto C.

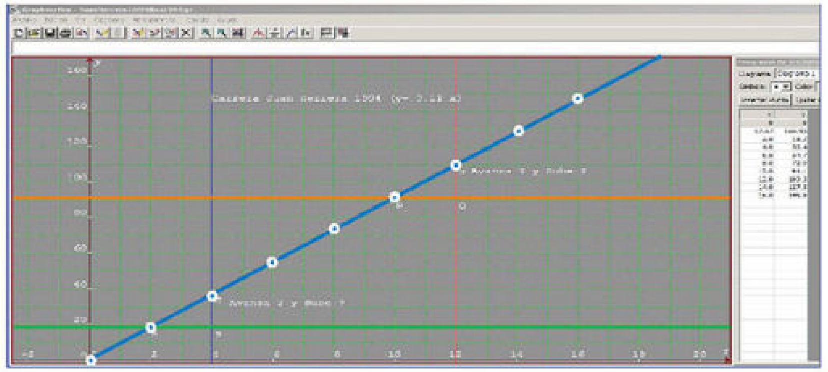


Figura 4.45

Describan lo que pasa para llegar del punto P al punto R sobre la recta.

____

____

Los triángulos ABC y PQR son rectángulos; todos sus lados son de igual longitud, por eso son congruentes. Pueden ver que los ángulos que forman las hipotenusas correspondientes y las rectas paralelas al eje X que pasan por los catetos AB y PQ respectivamente son iguales. Este ángulo se llama **inclinación de la recta**. Lo que se sube entre lo que se avanza se denomina **pendiente de la recta**.

Completen lo siguiente:

$$\frac{\textit{subido}}{\textit{avanzado}} = \frac{18.2}{2} = \frac{[\ \ ]}{4} = \frac{[\ \ ]}{6} = \frac{91.1}{[\ \ ]} = \frac{127.5}{[\ \ ]} = \frac{145.8}{[\ \ ]} = \frac{9.11}{[\ \ ]}$$

Verifiquen que la constancia de esos cocientes se cumple para dos puntos cualesquiera sobre la recta. Encuentren los valores de las coordenadas de cinco parejas de puntos deslizando el cursor sobre la recta y calculen los cocientes de sus coordenadas.

Lleguen a un consenso sobre las semejanzas y diferencias entre inclinación de la recta, razón de cambio, constante de proporcionalidad, pendiente de la recta y su relación con la expresión algebraica

$y = kx$, donde k es una constante.

Apliquemos

Individual

En la carrera de las 100 Millas de Leadville de 1994, la estadounidense Ann Tarson terminó en segundo lugar. Ella corrió el circuito en 18 horas 4 minutos y el rarámuri Martimiano Cervantes, que llegó en tercer sitio, hizo un tiempo de 19 horas 40 minutos.

Antes de representar las carreras de Ann y Martimiano en Graphmatica suponiendo que corren de manera uniforme, imagina que las dibujaste junto a la que tienes en la pantalla, la que representa la carrera de Juan.

1. ¿La recta que representará la carrera de ella será más inclinada que la de Juan? ____. ¿Por qué? ____________________

2. ¿La recta que representa la carrera de Ann será más inclinada que la recta que representa la carrera de Martimiano? ____. ¿Por qué? ________

Verifiquen sus hipótesis trazando las rectas asociadas a las carreras de ambos corredores. Usen la misma pantalla de Graphmatica en la que representaron la carrera de Juan. Para Ann pueden usar el Diagrama 2 y para Martimiano el Diagrama 3.

Respondan entre todos las cuatro preguntas del principio de la lección.

Apliquemos

Pareja

La representación de la carrera de Juan Herrera como una línea recta proporciona información para que quienes apoyan al corredor hagan previsiones para encontrarlo en un puerto determinado. Sin embargo, en esa manera de representar cómo corre Juan por el circuito pareciera que el rarámuri no se detiene durante 17 horas 40 minutos y mantiene siempre el mismo paso sin importar que vaya por una bajada muy inclinada o que suba una pendiente muy empinada.

En un ultramaratón los corredores deben detenerse para comer, hidratarse, cambiarse de ropa si es necesario y para que los controlen el peso, la frecuencia cardiaca y la presión sanguínea. La Tabla 4.15 tiene valores en los que se toman en cuenta cuatro paradas durante la carrera de Juan.

1. ¿En qué puertos se detuvo Juan? En __________, ___________ , ________ y __________

2. ¿Cuántos kilómetros había corrido cuando se detuvo por primera vez? ____________________________________

3. ¿Cuánto tiempo estuvo en el puerto de la primera parada? __________ ____________________________________

4. Al detenerse por tercera vez, ¿cuántos kilómetros había recorrido? __________, ¿Cuánto tiempo se quedó en ese puerto? __________

5. La cuarta vez que se detuvo, ¿cuántos kilómetros le faltaban para terminar la carrera? _____. ¿Cuánto tiempo le queda para recorrer esa distancia? ____________________________________

Puerto	Tiempo transcurrido en horas	Distancia recorrida en kilómetros
Leadville	0	0
Mary Queen	2.33	21.73
Fish Hatchery	3.96	37.82
Fish Hatchery	4.46	37.82
Half Moon	5.44	49.09
Twin Lakes	6.87	63.57
Hope Pass	7.78	71.62
Hope Pass	8.53	71.62
Winfield	9.46	80.47
Hope Pass	10.35	89.32
Twin Lakes	11.05	97.37
Half Moon	12.50	111.85
Half Moon	13.25	111.85
Fish Hatchery	14.27	123.11
Mary Queen	15.82	139.21
Mary Queen	16.32	139.21
Leadville	17.67	160.93

Tabla 4.15

6. Con las nuevas condiciones, ¿el tiempo transcurrido y la distancia recorrida serán magnitudes que varíen proporcionalmente? _____ ¿Por qué? ____________________________________

Utilicen la hoja de cálculo para hacer una segunda representación de la carrera de Juan considerando las cuatro veces que tuvo que detenerse. Antes de construir esa representación dibujen en un papel cómo se imaginan que puede representarse cómo corrió Juan bajo estas nuevas condiciones.

Quizá ya saben cómo hacer una gráfica en la hoja de cálculo, pero si no se acuerdan sigan estas indicaciones:

1. Para hacer la gráfica con los nuevos datos de la carrera de Juan, reproduzcan en la hoja de cálculo la tabla de valores anterior que usaron para responder las preguntas.
2. Seleccionen la segunda y la tercera columnas con el cursor.
3. Hagan clic en Gráficos y seleccionen Dispersión.
4. En la cascada, elijan Dispersión con líneas rectas.
5. En opciones de Gráficos póngale nombre a la gráfica, el eje horizontal y el vertical.
6. Cambien la escala del eje horizontal. Para eso hagan clic en los números y seleccionen Formato; en la cascada seleccionen Escala y en el cuadro de diálogo escriban 1 en la unidad mayor.
7. Cambien la escala del eje vertical; hagan lo mismo que en el inciso 6 y escriban 10 en la unidad mayor.

Les debe quedar una gráfica similar a la que se presenta en la Figura 4.46.

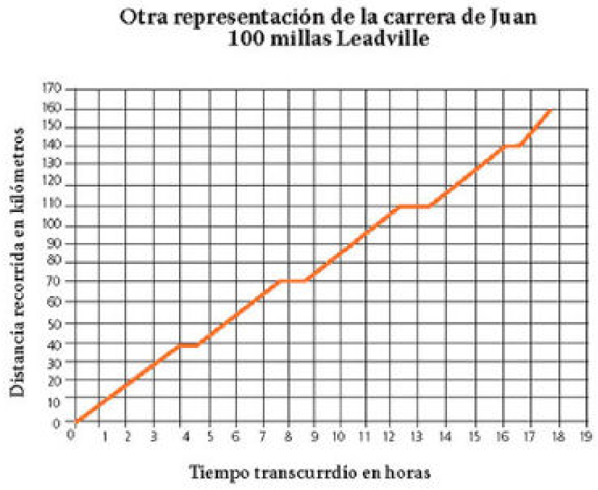


Figura 4.46

7. Pueden ver que la gráfica está formada por varios segmentos de recta. ¿Cuántos segmentos de recta identifican? ____________________

8 ¿Qué representan los segmentos de recta que son paralelos al eje X?

____

9 ¿Con esta representación de la carrera de Juan pueden decir en qué tramo corrió más rápido? ______ ¿En cuál? ______ ¿Por qué? __________

____

10 ¿En qué tramo corrió Juan más despacio? ________. ¿Por qué? _______

____

11 ¿Juan hizo el mismo tiempo de Half Moon a Twin lakes que de Twin Lakes a Half Moon? ________________________________

12 ¿Corrió Juan con la misma rapidez de Leadville a Mary Queen que de Mary Queen a Leadville? _____ ¿Cómo se refleja esta situación en la gráfica? ________________________________

Comparen sus respuestas con otros compañeros.

Si fueran miembros del equipo de apoyo de Juan Herrera, ¿cuál de las dos representaciones de su carrera usarían para planear cómo ayudarle? Hagan una discusión colectiva para analizar ventajas y desventajas.

Situación problemática

Para resolver las siguientes preguntas es necesario usar la gráfica del perfil de la altitud incluida al principio de esta lección y la tabla de valores correspondiente.

Fíjense que la gráfica está formada por segmentos de recta. Escriban en su cuaderno lo que indica la gráfica.

En la gráfica se representan aumentos y disminuciones de altura en el circuito de la carrera.

1 ¿El esfuerzo que necesita hacer Juan para ir del puerto Fish Hatchery al puerto Twin Lakes es igual al que hará de Twin Lakes a Fish Hatchery? __________ ¿Por qué? ________________

____

2 ¿Entre qué puertos encontrará Juan la subida más empinada?

____

3 ¿Entre qué puertos está la bajada más inclinada? ________________

____

4 ¿Corrió Juan con la misma rapidez de Fish Hatchery a Half Moon que de Twin Lakes a Half Moon? _____ ¿Por qué? ________________

____

Calculando la razón de cambio de la altura respecto a la distancia recorrida en el circuito puede analizarse qué tan rápido se dan los incrementos o las disminuciones en la altura en los distintos tramos del recorrido. En este caso, la razón de cambio en un tramo recto se calcula con el cociente:

$$\frac{\textit{cambio en la altura}}{\textit{cambio en la distancia recorrida}}$$

5 Escriban en su cuaderno cómo se calcula el cambio de la altura.

6 Calculen la razón de cambio entre Fish Hatchery y Half Moon y entre Twin Lakes y Half Moon. ¿En cuál de los dos tramos aumentó más rápido la altura? ________________________________

7 Calculen la razón de cambio entre Twin Lakes y Hopepass y entre Hopepass y Twin Lakes. ¿Qué observan? ________________
________________________________. ¿Cómo lo explicarían?

8 ¿La razón de cambio entre Leadville y Winfield y entre Winfield y Leadville será la misma? _____. Calcúlenla para verificar su hipótesis.

9 Hagan una tabla de variación para calcular la razón de cambio entre cada dos puertos consecutivos. Describan lo que observan.

10 Para cada uno de los segmentos de recta calculen la pendiente de la recta. Describan lo que observan.

Comparen sus respuestas con sus compañeros y lleguen a un consenso respecto a la respuesta a la siguiente pregunta: ¿La pendiente de una recta en un gráfica es igual a la razón de cambio? Escriban las conclusiones a las que llegaron:

____
____
____
____
____

Lección 7

Dispersión de datos y su media

En esta lección aprenderás que además de la medida como tendencia central de un conjunto de datos, el conjunto se caracteriza por la manera en que los distintos datos se agrupan, estrechándose alrededor de la media o alejándose de ella.

Conocimientos previos

1. Indica las tres medidas de tendencia central más comunes: ______________________________

2. Define cada una de las medidas que indicaste en el inciso 1:
__________________; ____________________; ____________________

2. ¿Qué información proporcionan las medidas de tendencia central? ______________________________

4. ¿Para qué tipo de datos se considera la media aritmética? ______________________________

5. El trabajo de Mario incluye la mensajería, de la que se registraron en la Tabla 4.16 los kilómetros diarios que recorrió durante un mes.

   a) En tu cuaderno, en una misma gráfica, con un color distinto para cada conjunto de datos, traza un polígono de frecuencia.

	Dato (en km)					$\bar{x}$ (en km)
	L	M	M	J	V	
1ª semana	2	5	6	8	9	
2ª semana	4	6	5	7	8	
3ª semana	6	6	6	6	6	
4ª semana	3	4	10	9	4	

Tabla 4.16

   b) Agrega los rótulos de los ejes, las etiquetas de las escalas y el título de la gráfica.

   c) Indica el código de los colores que utilizaste.

   d) Calcula la media aritmética $\bar{x}$ de los recorridos por semana y anótala en la tabla.

   e) Ya que puedes representar los datos de las cuatro semanas con una misma cantidad, ¿cómo indicarías sus diferencias? ______________________________

   Aunque la media aritmética sea la misma, los cuatro conjuntos de datos son muy distintos y no basta con la media para describirlos.

Situación problemática

¿Cuál sería una semana de mensajería típica de Mario? ¿Cómo se *distribuyen* sus recorridos?
En pareja, discutan y anticipen una respuesta a las preguntas anteriores: ______________________________. Luego sigan las instrucciones y discutan cada contestación.

1. Puesto que la media aritmética no es suficiente para describir el comportamiento de los datos, consideren sus valores extremos, o sea el *valor mínimo* y el *valor máximo*, de cada conjunto de datos. Anótenlos en la Tabla 4.17. Entre esos dos valores se reparten los demás datos.

	Dato (en km)					Mínimo (en km)	Máximo (en km)	Rango (en km)
	L	M	M	J	V			
1ª semana	2	5	6	8	9			
2ª semana	4	6	5	7	8			
3ª semana	6	6	6	6	6			
4ª semana	3	4	10	9	4			

Tabla 4.17

La diferencia *valor máximo–valor mínimo* se denomina rango o **recorrido** del conjunto de datos y es una medida de la dispersión de los mismos. Sin embargo, no informa del comportamiento de los datos entre los dos valores extremos.

2. Anoten en la tabla el rango de cada conjunto de datos. Observen que ahora pueden distinguir entre tres de los cuatro conjuntos de datos.

   Una forma de determinar la dispersión de los datos de un conjunto consiste en medir su desviación de un número fijo, para lo cual es muy apropiada la media de ese conjunto.

Glosario

Rango: es la diferencia entre los valores mayor y menor de un conjunto de datos.

Dispersión: en una muestra, es la medida en la que los datos se dispersan alrededor de un punto central.

3 Calculen la diferencia, o desviación, entre cada dato y la media aritmética; escriban el resultado en la Tabla 4.18. ¿Para qué semana y qué día se tiene la mayor desviación respecto a la media? ______ ¿Y para qué semana y qué día se tiene la menor desviación de la media? ______________

Tabla 4.18

	Datos (en km)					Desviaciones (en km) Dato $\bar{x}$					Suma de desviaciones
	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	
1ª semana	2	5	6	8	9	4					
2ª semana	4	6	5	7	8				1		
3ª semana	6	6	6	6	6		0				
4ª semana	3	4	10	9	4						

Observen que mientras más se desvíe el dato de la media, mayor es la dispersión.

Glosario

Desviación: es una medida del grado de dispersión de los datos respecto del valor promedio.

Desviación media: es la diferencia en valor absoluto entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

4 Para cada semana, sumen las desviaciones de sus datos respecto a la media aritmética. Anoten el resultado en la última columna de la tabla.

5 Discutan y expliquen por qué obtuvieron ese resultado de la última columna de la tabla: ________________________________

La suma de las desviaciones respecto a la media siempre vale cero, porque equivale a sumar y restar tantas veces la media aritmética como datos haya.

Pero si no tomamos en cuenta los signos "–" (negativos) de las desviaciones y las consideramos en *valor absoluto* para calcular su media aritmética, obtenemos la **desviación absoluta media** o desviación media. El valor absoluto de un número lo denotamos encerrando el número entre dos barras, por ejemplo, $|-4| = 4$.

6 Anoten en la Tabla 4.19 las desviaciones absolutas de cada dato respecto a la media, calculen la desviación media de cada conjunto de datos y escríbanla también en la tabla.

Tabla 4.19

	Dato (en km)					Desviación absoluta (en km) $\lvert$Dato $\bar{x}\rvert$					Media aritmética de desviaciones absolutas (en km)
	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	
1ª semana	2	5	6	8	9						2
2ª semana	4	6	5	7	8						
3ª semana	6	6	6	6	6						
4ª semana	3	4	10	9	4						

7 ¿Corresponde una mayor desviación media a una mayor dispersión de los datos? __________ ¿Por qué? ______________________________

8 ¿Cuál señalarían ahora como un día típico de Mario? ________. Si cambió su respuesta respecto a la primera de esta sección, ¿por qué fue así? ______________________________

Comprendamos

Pareja

Se publican los precios de venta de la docena de huevo blanco en distintas cadenas de supermercados del Distrito Federal y el área metropolitana, y se comparan con el precio de venta al principio del año (Fuente: *Quién es quién en los precios*).

En pareja discutan cada pregunta y sigan las instrucciones.

1 Lean los encabezados de la Tabal 4.20 y analicen sus datos.

2 Expliquen cómo se obtuvo el "promedio por cadena": ______________

Cadena de supermercado	I. Promedio por cadena (dato) hasta el 23/05/13	II. Diferencia (dif) entre promedio por cadena y el precio del 14/01/13
A	\$23.22	–\$0.53
B	\$22.51	–\$0.46
C	\$23.87	–\$0.63
D	\$24.01	–\$0.43
E	\$25.14	\$1.31
F	\$24.10	–\$0.56
G	\$27.92	–\$0.58
H	\$28.28	–\$0.22
I	\$24.27	\$0.71
J	\$25.83	\$0.43
K	\$26.95	\$0.11
L	\$27.09	–\$0.14
M	\$27.10	\$0.53
N	\$24.77	\$1.79
Ñ	\$26.11	–\$0.79
O	\$26.06	\$0.16
P	\$24.65	–\$2.81
Q	\$23.64	\$1.44

Tabla 4.20

3 Identifiquen los valores máximo y mínimo del precio promedio del huevo por cadena: ____________________

4 Calculen el rango del precio promedio por cadena: ____________

5 Calculen la media aritmética $\bar{x}$ de los precios promedio por cadena: ____________________

6 En la tercera columna de la Tabla 4.21, anoten la desviación de la media para cada dato.

7 Calculen la media aritmética de las desviaciones absolutas de los datos respecto a la media, es decir, determinen su desviación media: ____________________

8 ¿Cuáles son las unidades de la desviación media? ______. Comparen la desviación media con el rango del conjunto de datos: __________

9 En su cuaderno, tracen la gráfica de barras de los promedios por cadena del precio del huevo. Noten que el eje horizontal cruza el vertical en el valor $21.00. ¿Altera esto el comportamiento de los datos? ____. Expliquen su respuesta: ____________________

Cadena de supermercado	Desviación dato $-\bar{x}$	Desviación absoluta $\lvert$dato $-\bar{x}\rvert$
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		
Ñ		
O		
P		
Q		

Tabla 4.21

10 Escriban el título de la gráfica en la línea que se encuentra arriba y rotulen los ejes a un lado de las flechas. Anoten también las etiquetas del eje horizontal y sus marcas.

11 Ubiquen el rango del conjunto de datos en el eje vertical.

12 Tracen una línea horizontal que cruce el eje vertical en el valor de la media aritmética de los datos.

a Arriba de la recta de la media aritmética, tracen una línea horizontal que se aleje de la media una distancia igual a la desviación media.

b Abajo de la recta de la media aritmética, dibujen una línea horizontal que se aleje de la media una distancia igual a la desviación media.

La franja centrada en la media indica la zona del promedio de las desviaciones de los datos.

Integremos

En pareja examinen los datos de la tercera columna de la tabla relativa al precio de la docena de huevo blanco. Discutan cada pregunta y sigan las instrucciones.

Pareja

1 ¿Qué significa una diferencia *negativa* entre el precio promedio por cadena y el precio del 14 de enero de 2013? ____________________

2 ¿Qué significa una diferencia *positiva* entre el precio promedio por cadena y el precio del 14 de enero de 2013? ____________________

3 Identifiquen los valores máximo y mínimo de las diferencias entre los precios promedio por cadena y su precio del 14 de enero de 2013: ____________________

4 Calculen el **rango** de las diferencias entre los precios promedio por cadena y sus precios en enero: ____________________

5 En los ejes debajo a la derecha (Figura 4.47), con los datos de las diferencias en la primera tabla de esta sección tracen una gráfica de barras. Titúlenla y rotulen los ejes; añadan debajo de la gráfica las etiquetas para el eje horizontal.

6 Calculen la media aritmética $\bar{x}_{dif}$ de las diferencias entre promedio por cadena y el precio del 14 de enero de 2013 por cadena: ____________________.

Expliquen este resultado: ____________________

7 Con el valor de $\bar{x}_{dif}$, completen la Tabla 4.22.

Cadena de supermercado	Desviación dato − $\bar{x}_{dif}$	Desviación absoluta $\|dato - \bar{x}_{dif}\|$
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		
Ñ		
O		
P		
Q		

Tabla 4.22

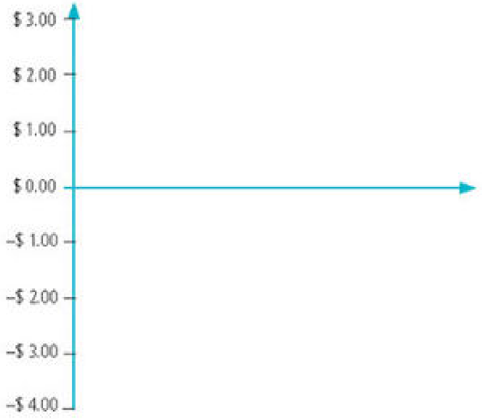


Figura 4.47

8 Calculen la media aritmética de las desviaciones absolutas de las diferencias respecto a su media $\bar{x}_{dif}$, es decir, calculen su desviación media: ____

9 Comparen la desviación media con el rango de las diferencias (dif).

10 Ubiquen una línea horizontal que cruce el eje vertical en el valor $\bar{x}_{dif}$. Tracen una franja centrada en $\bar{x}_{dif}$ cuyo ancho sea dos veces la desviación media de las diferencias de precios. Expliquen con su gráfica el comportamiento de las diferencias: ____

La media aritmética, el rango y la desviación media proporcionan un resumen de un conjunto de datos que toma en cuenta tanto su concentración como su dispersión absoluta y relativa a $\bar{x}$.

Apliquemos

Contesta los incisos de cada problema. Elabora todas las operaciones en tu cuaderno y anota aquí tus resultados; también en tu cuaderno, traza las gráficas que se te pidan. Presenta tus respuestas ante el grupo.

Examina los datos de la Tabla 4.23. Individual

1 ¿De qué manera los resumirías? ______________________

2 ¿Cuál es el número total de incendios acumulados? ______________________

3 ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo del número de incendios acumulados de la tabla? ______________________

4 Calcula el rango del número de incendios: ______________________

Número de incendios acumulados de enero a mayo de 2013 por entidad federativa		
Entidad federativa	Número de incendios acumulados	Duración promedio (horas)
Aguascalientes	40	05:52
Baja California	32	12:21
Baja California Sur	25	13:32
Campeche	15	82:29
Coahuila de Zaragoza	14	91:07
Colima	50	19:20
Chiapas	348	37:36
Chihuahua	735	7:47
Distrito Federal	1 112	2:55
Durango	139	24:52
Guanajuato	22	36:28
Guerrero	182	66:49
Hidalgo	427	4:44
Jalisco	464	13:33
México	2 298	3:37
Michoacán de Ocampo	1 080	7:21
Morelos	152	11:16
Nayarit	84	12:29
Nuevo León	20	37:39
Oaxaca	350	25:19
Puebla	498	7:47
Querétaro de Arteaga	87	8:47
Quintana Roo	44	168:00
San Luis Potosí	55	45:15
Sinaloa	18	35:46
Sonora	32	36:49
Tabasco	20	35:13
Tamaulipas	23	141:29
Tlaxcala	288	2:21
Veracruz de Ignacio de la Llave	218	9:59
Yucatán	35	46:43

Tabla 4.23

(Fuente: http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/10/4215Reporte%20Semanal%202013%20-%20Incendios%20Forestales.pdf)

5 Calcula la media aritmética $\bar{x}$ del número de incendios: ______________________________

6 En tu cuaderno, organiza una tabla con una columna para las entidades federativas, otra para las desviaciones de los números de incendio respecto a $\bar{x}$ y otra más para las desviaciones absolutas.

7 Calcula la desviación media del número de incendios.

8 Traza una gráfica de barras para el número de incendios (eje vertical) por entidad (eje horizontal).

9 Rotula los ejes, etiquétalos y titula la gráfica.

10 Ubica una línea horizontal que cruce el eje vertical en el valor de la media aritmética.

11 Traza una banda centrada en la media aritmética cuyo ancho sea dos veces la desviación media.

12 Ubica el rango del número de incendios por entidad en el eje vertical y compáralo con la desviación media.

13 Resume los datos del número de incendios: ______________________________

Con los datos de la duración promedio de los incendios:

1 Identifica las duraciones mínima y máxima: ______________________________

2 Calcula el rango de la duración de los incendios: ______________________________

3 Calcula la media ponderada de la duración de los incendios: __________
Explica por qué es necesario considerarla: ______________________________

4 En una tabla con tres columnas, indica en la segunda las desviaciones de las duraciones respecto a la media del inciso 3.

5 Calcula la desviación media de las duraciones y resúmelas.

Glosario

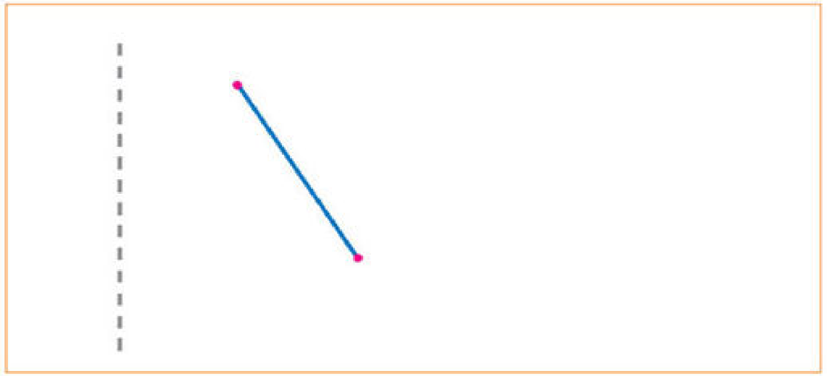
Media ponderada: es una medida de tendencia central que se construye asignándole a cada clase un peso y obteniendo un promedio para los mismos.

Evaluación

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, al terminar muéstralos a tu profesor para su evaluación.

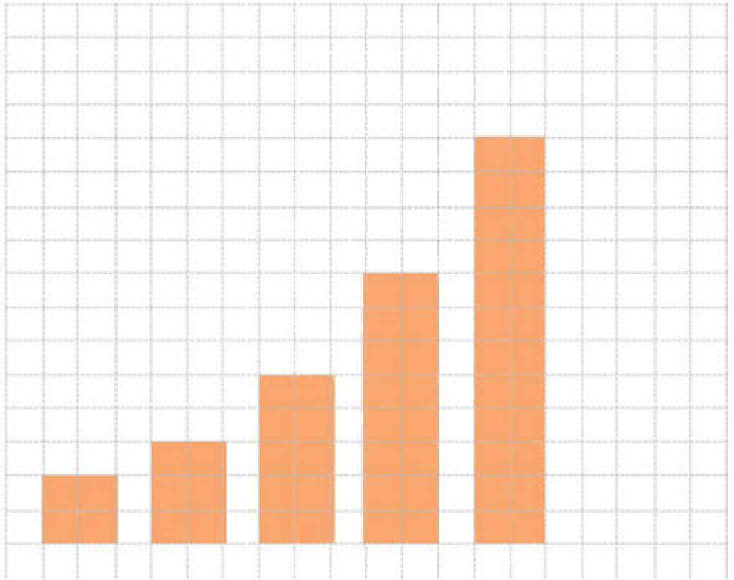
1. **¿Qué cuerpo se genera al girar el segmento de trazo continuo alrededor de la recta punteada? ____________________. Dibújalo en el espacio de la derecha.**

Figura 4.48



2. **De las siguientes sucesiones, obtén la ecuación que sirve para conocer para cada figura el número total de cuadritos.**

Gráfica 4.1



a) Dibuja las dos figuras siguientes de la sucesión.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica para conocer cualquier momento cuadrado de la sucesión?

c) Completa la tabla siguiente:

Posición	Número cuadrado
1	4
2	
	10
5	24
n	

Tabla 4.24

3. **Lee con atención y resuelve lo que se te pide.**

Razones trigonométricas

La trigonometría es una rama de la matemática, la cual etimológicamente significa "la medición de los triángulos". En ella se estudian las razones trigonométricas directas e inversas. Su aplicación es en innumerables situaciones como las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

Un avión al salir del aeropuerto se eleva manteniendo un ángulo constante de 15° hasta que adquiere una altura de 10 km.

Figura 4.49

a Indica qué distancia ha recorrido en ese momento el avión.

38.64 km   10.35 km   37.32 km   6.11 km

b Si se prolongara la pista de aterrizaje, ¿qué distancia de la pista habría avanzado en ese momento?

15.23 Km   85.06 km   86.38 km   37.32 km

c En la siguiente cuadrícula considera que cada cuadrito mide 2 cm. Señala cómo son las tangentes del ángulo a en el triángulo ABC y el triángulo AED.

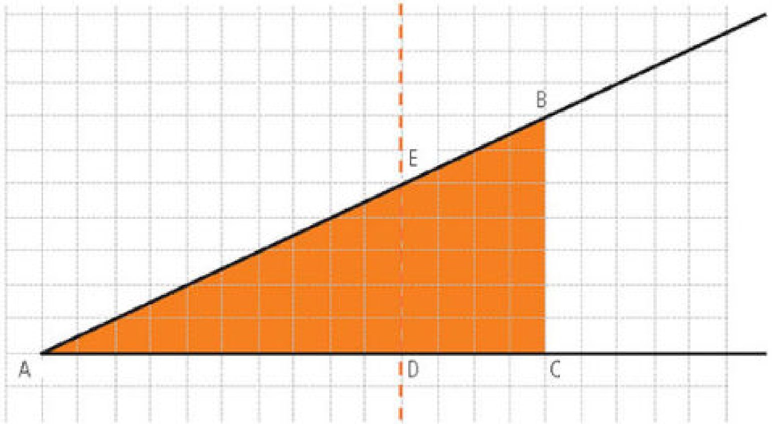


Figura 4.50

Diferentes   Son el doble una de la otra

Iguales   Son la mitad una de la otra

d Traza tres triángulos diferentes cuya tangente sea igual a la tangente del ángulo a del triángulo ABC y argumenta tu construcción.

4. Encuentra el seno y coseno de los ángulos y del siguiente triángulo.

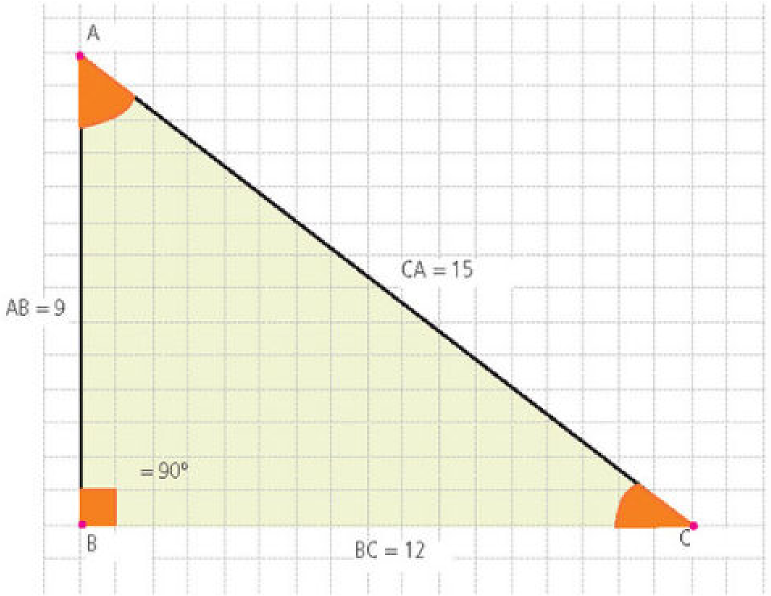
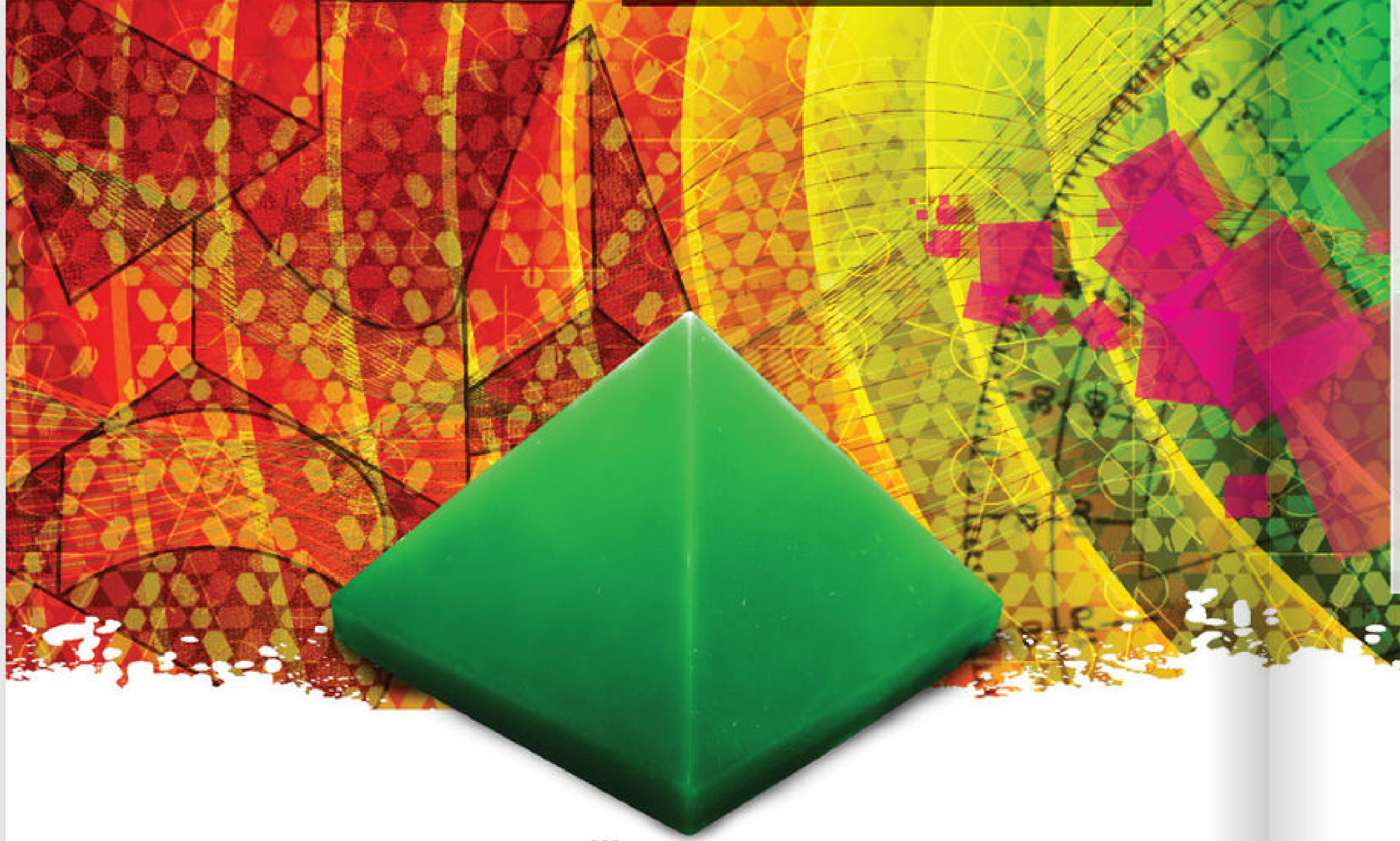


Figura 4.51

Bloque V

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Planeación del Profesor
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada	1	28	
Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto	2	29	
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides	3	30	
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	4	31	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	5	32	
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	6	33	

Lección 1

Uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones

En esta lección aprenderás a, dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa; y a proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.

Conocimientos previos

Ya resolviste problemas llamados "de edades", en los que es posible establecer relaciones entre las edades de dos o más personas. En otros problemas, por ejemplo, se plantea una situación en la que debe repartirse una herencia. Asimismo, en algunos casos, dadas algunas medidas y el área o perímetro de un objeto, se te pide calcular la medida faltante. Veamos algunas de estas situaciones.

1 Juan ha dejado una herencia de $43 246.00 a sus hijos: a Miriam, la mayor, le corresponde el doble que a José, y a Raúl, el menor, le corresponde la mitad que a José.

a ¿Cuánto dinero dejó Juan a cada uno de sus tres hijos? Expresa por medio de una ecuación el problema planteado y resuélvela.
A Miriam le corresponden ______________________.
A José le corresponden ______________________.
A Raúl le corresponden ______________________.

b La ecuación $3.5b = 43\,246$ lleva a conocer el dinero que le toca ________. Justifica tu respuesta. ______________________
____
____

2 Rosa tiene un terreno de forma rectangular de 82 m de perímetro y sabe que un lado es cuatro veces mayor que el otro.

a Las siguientes ecuaciones sirven para encontrar cuánto mide uno de los lados, ¿qué representa la letra b en cada ecuación? ________

$$2(4b) + 2b = 82$$

$$2b + 2\left(\frac{b}{4}\right) = 82$$

$$10b = 82$$

b Escoge una ecuación y resuelve el problema. ¿Cuánto mide cada lado del terreno?
____

c Comprueba los resultados.

Situación problemática

Individual

1 Las edades de José y Guillermo suman 69 años; si la edad de José es tres sextas partes de la edad de Guillermo más 6 años, ¿cuántos años tiene cada uno? ______________________.

2 El mayor de dos números es siete veces el menor y ambos números suman 112, ¿cuáles son estos números? ______________________.

3 Tres cajas contienen en total 735 manzanas. La primera caja tiene 20 manzanas más que la segunda y 25 más que la tercera. La primera caja tiene x manzanas.

a ¿Cuántas manzanas tiene la segunda caja en función de la primera?
______________________.

b ¿Cuántas manzanas tiene la tercera caja en función de la primera?
______________________.

c Representa el problema por medio de una ecuación y resuélvela.

La primera caja tiene ______ manzanas; la segunda caja tiene ______ y la tercera caja tiene ______ manzanas.

Comprendamos

Individual

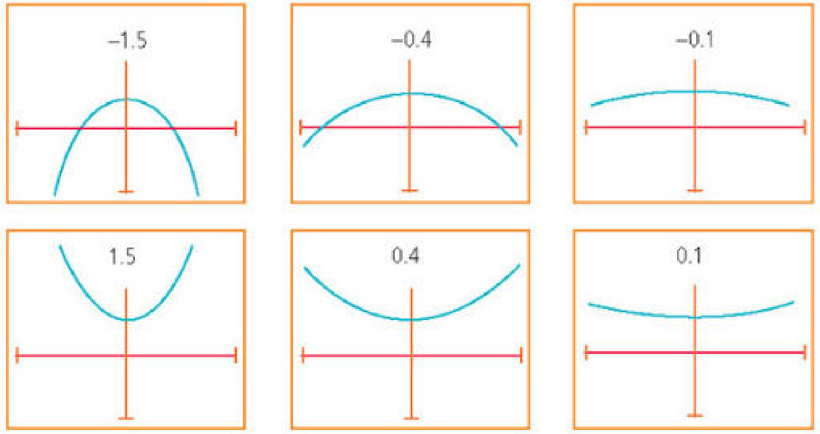


Figura 5.1

Utilizamos ecuaciones de segundo grado o cuadráticas para resolver problemas de triángulos rectángulos o movimiento-aceleración (Figura 5.1).

En distintos campos de la ciencia, para elaborar algunos cálculos se requiere plantear y resolver ecuaciones de segundo grado. Pregunta a tu profesor de ciencias en qué situaciones se usan tales ecuaciones.

1 Completa la Tabla 5.1 para valores x y y de la función.

$y = 3x^2 - 3x - 48y$

Tabla 5.1

x	0	1	2	3	5	10	13	14	15
y									

a) El valor de y es 0 para un valor de x que está entre _____ y _____. Encuentra el valor de x, con dos cifras decimales, que dé el valor de y más cercano a 0.

b) Verifica tu respuesta resolviendo algebraicamente la ecuación en tu cuaderno.

c) Traza en tu cuarderno la gráfica de la función y verifica que la curva pasa por el punto del eje x indicado.

2 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $(3x + 3)^2 + 15 = (2x + 2)^2 + 3^3$? Justifica tu respuesta.

3 El área de un rectángulo es 192 m² y el ancho es una tercera parte del largo, ¿cuáles son las medidas del rectángulo?

Pareja

4 En pareja, resuelvan los siguientes problemas; auxíliense de las figuras y del teorema de Pitágoras. Calculen la altura y la base del triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 9 cm y la altura es 2.5 cm más grande que la base que se presenta en la Figura 5.2. Comprueben los resultados.

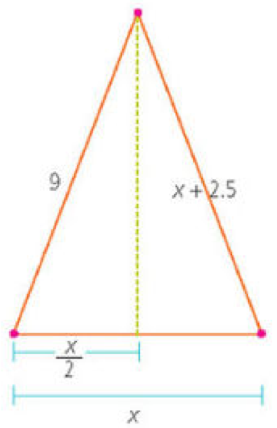


Figura 5.2

5 En un círculo, la distancia entre dos cuerdas paralelas congruentes es de 8 cm (Figura 5.3). Cada cuerda mide 1 cm más que el radio. ¿Cuánto mide el radio?

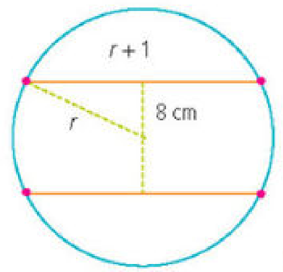


Figura 5.3

a) Representen el problema por medio de una ecuación y resuélvanla.

b) Comprueben los resultados.

Integremos

Individual

En segundo grado estudiaste sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; ahora vas a resolver diversos problemas con ayuda de estos sistemas de ecuaciones.

1 Representa por medio de un sistema de ecuaciones los problemas siguientes:

a) La suma de dos números es 57 y su diferencia es 33: ____________________

b La suma de edades de Juan y José es 28, su producto es 171:

____

2 Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos camas) y sencillos (una cama). Si están sin ocupar 80 camarotes, que en total tienen 130 camas:

a Hay ______ camarotes dobles y ______ sencillos.

b Representa el problema por medio de un sistema de ecuaciones y resuélvelo.

c Comprueba tus resultados.

3 David tiene 30 monedas, unas de \$5.00 y otras de \$10.00, las cuales suman \$240.00 en total. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene David?

a Representa el problema por medio de un sistema de ecuaciones y resuélvelo.

b David tiene ______monedas de \$5.00 y ______ monedas de \$10.00.

c Comprueba tus resultados.

Apliquemos

Individual

1 En un terreno se encuentran pollos y conejos, para un total de 55 cabezas y 170 patas.
Hay ______ pollos y ______ conejos.

2 En una granja se han envasado 410 litros de leche en 130 botellas de 2 y 5 litros.
Se utilizaron ______ botellas de 2 litros y ______ botellas de 5 litros.

3 En el salón de primer grado hay 20 alumnos. Por su buen comportamiento, a cada alumna le regalaron dos cuadernos y a cada alumno un juego de geometría. Si en total se repartieron 32 regalos, ¿cuántas alumnas y cuántos alumnos conforman el grupo?

____

4 Hemos trabajado la ecuación $n(n + 1) = n^2 + n$ que representaba una sucesión de rectángulos. ¿Puedes contestar cuál es la figura que tiene 143 cuadritos?

Cortes a cilindros y conos rectos

Lección 2

En esta lección aprenderás a anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras; a construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos; a anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o un cono recto; y a determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.

Conocimientos previos

En la Figura 5.4, los puntos sobre el segmento BC lo dividen en cuatro partes iguales; además, el segmento XY es paralelo al segmento CA.

¿Cuánto mide el segmento XY? ________.

Describe cómo obtuviste la respuesta.

____
____
____

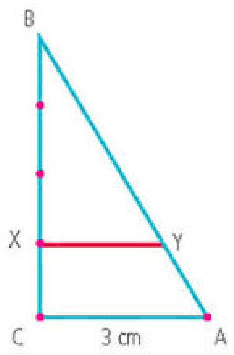


Figura 5.4

Situación problemática

Individual

Si sobre un cono circular recto se hace un corte con un plano paralelo a su base y a una altura menor que la del cono, se obtiene un cono truncado, como se ilustra en la Figura 5.5.

¿Cómo se calcula el volumen de un cono truncado?

____
____
____

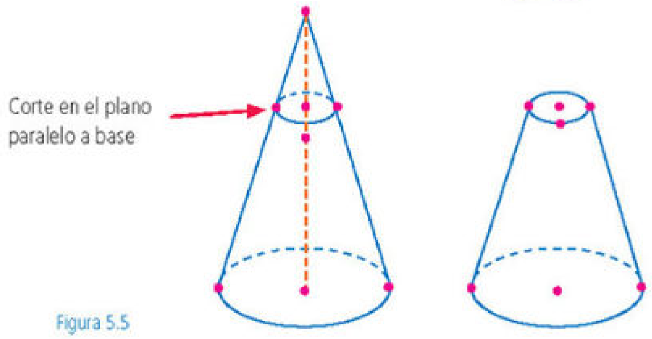


Figura 5.5

Comprendamos

Pareja

1 En pareja construyan un cilindro circular recto utilizando monedas de la misma denominación. ¿Cómo son los círculos de dos monedas que tienen la misma denominación? __________. Si al cilindro construido con tales monedas le quitas algunas de ellas, lo que te queda es ________________________.

2 Dibujen un cilindro circular recto en el espacio que sigue.

Al trazar un plano paralelo a la base del cilindro a una altura menor que su altura, cortan el cilindro en dos partes. ¿Qué figura representa el corte en cualquiera de las dos partes? _______________. ¿Qué relación tiene con la base del cilindro? ___________________. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

3 En el caso de un cono circular recto, al hacer un corte con un plano paralelo a la base, a una altura menor que la del cono, ¿qué figura representa el corte? ____

¿Cómo es dicha figura con respecto a la base del cono?

____

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

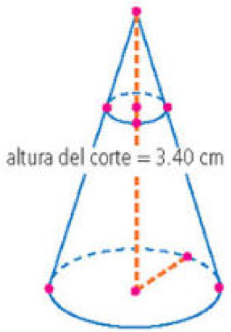
4 En el cono circular recto de la Figura 5.6, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia representada por el corte? ____________

Describe cómo obtuvieron la respuesta.

____

____

Figura 5.6



Integremos

Individual

1 En el caso del cilindro circular recto, al hacer un corte con un plano paralelo a la base del cilindro a una altura menor que la de dicho cilindro, ¿qué figura representa el corte? ______________. ¿Cómo es esa figura respecto a la base del cilindro? ______. Coméntalo con el grupo.

2 Para el cono circular recto, al hacer un corte con un plano paralelo a la base del cono a una altura menor que la del cono, ¿qué figura representa el corte? ____.

¿Cómo es dicha figura respecto a la base del cono?

____

3 En la Figura 5.7, *h* es menor que la altura del cilindro.

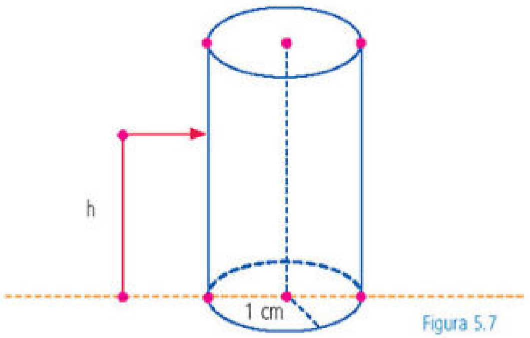


Figura 5.7

¿Qué figura obtienes al elaborar el corte al cilindro con un plano paralelo a la base del cilindro, a una altura *h*? _____________. Al compararla con la base del cilindro, ¿qué dirías? _______________________. Como tus respuestas son válidas para cualquier *h* menor que la altura del cilindro, ¿cuál es tu conclusión?

____

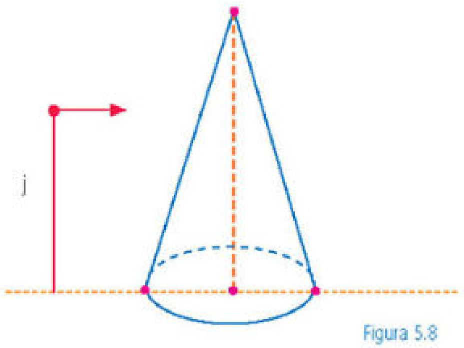


Figura 5.8

4 En la Figura 5.8, *j* es menor que la altura del cono.
¿Qué figura obtienes al efectuar el corte al cono, con un plano paralelo a la base del cono, a una altura *j*? ____________________. Al compararla con la base del cono, ¿qué dirías? ________________________.
Ya que tus respuestas son válidas para cualquier *j* menor que la altura del cono, ¿qué concluyes?

____

Cuando *j* varía desde 0 hasta la altura del cono, ¿qué le ocurre a la figura que es la intersección del plano paralelo a la base con el cono?

____

Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

Apliquemos

Individual

1 Un cono circular recto tiene por altura la indicada en la primera columna de la Tabla 5.2 y el radio de su base siempre mide 12 cm. Calcula las medidas que faltan.

Tabla 5.2

Altura del cono	Altura del corte con un plano paralelo a la base	Radio de la circunferencia correspondiente al corte
10 cm	2 cm	
10 cm		3 cm
15 cm		2 cm
15 cm	12 cm	

2 Un cilindro circular recto y un cono circular recto tienen el mismo volumen. Si los radios de las bases de ambos cuerpos son iguales, ¿cuál es la relación entre sus alturas? ______________________
Describe cómo obtuviste tu respuesta.

____

____

3 Dentro de un cilindro circular recto sin tapa superior, se introduce un cono recto que tiene la misma altura y base del cilindro. ¿Cuál es el volumen encerrado entre el cilindro y el cono que se le introdujo?

____

____

Compara tu respuesta con las de otros compañeros.

Cilindros y conos y las fórmulas de pirámides y prismas

Lección 3

En esta lección aprenderás a construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.

Conocimientos previos

Recuerda que un prisma es un objeto de tres dimensiones, es un poliedro.

1 Describe lo que entiendes por poliedro: ________________

____

Fíjate en la Figura 5.9, se trata de prismas; nos imaginamos sus caras como rectángulos. También hay algunos con caras de cuadrados; identifica alguno en la fotografía.

2 Escribe la diferencia entre cuadrado y rectángulo.

____

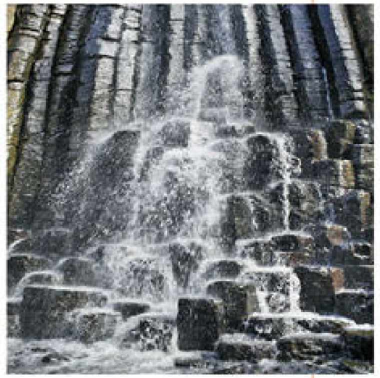


Figura 5.9

3 Los cubos, que son prismas, también se llaman hexaedros: *hexa* significa seis. ¿Cuántas caras tiene un cubo? ____________

Dos de las caras de todo prisma pueden ser cualesquiera polígonos regulares. En la Figura 5.10 hemos señalado la cara superior de dos prismas.

Las caras superior e inferior de los prismas son paralelas. ¿Qué significa que sean paralelas? ______________________________

Figura 5.10

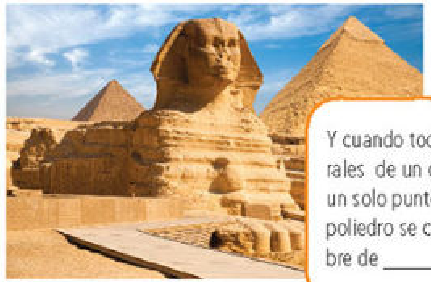


Figura 5.11

Y cuando todas las caras laterales de un cuerpo se unen en un solo punto, llamado ápice, el poliedro se conoce con el nombre de ________________

4 Busca en internet por lo menos cinco fotografías de prismas que aparezcan en la naturaleza y marca sobre ellas las caras de los polígonos. En general los edificios tienen forma de prismas.

¿Qué forma tiene tu salón? ______________________________

5 Existen construcciones formadas por prismas y pirámides. En la Figura 5.12 marca con negro el contorno de cinco prismas y con rojo el de cinco pirámides.

Figura 5.12

6 Busca en internet por lo menos tres imágenes de edificios donde haya prismas y pirámides. Entre todos seleccionen las que más les interesen y hagan con ellas un periódico mural.

Comprendamos

Grupo

1 Las operaciones con números nos dan información sobre el área y el volumen de los poliedros: la multiplicación 20 15 puede representar el área de un rectángulo y la multiplicación 20 15 8 puede representar el volumen del prisma rectangular (Figura 5.13).

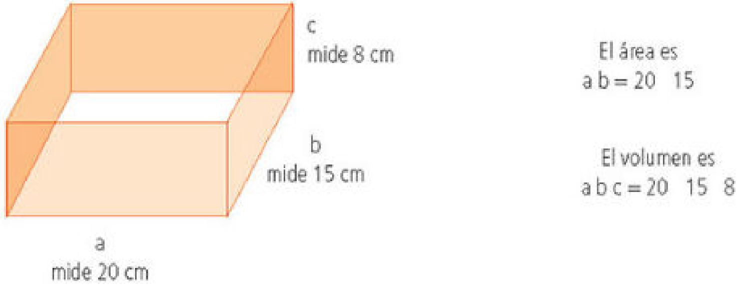


Figura 5.13

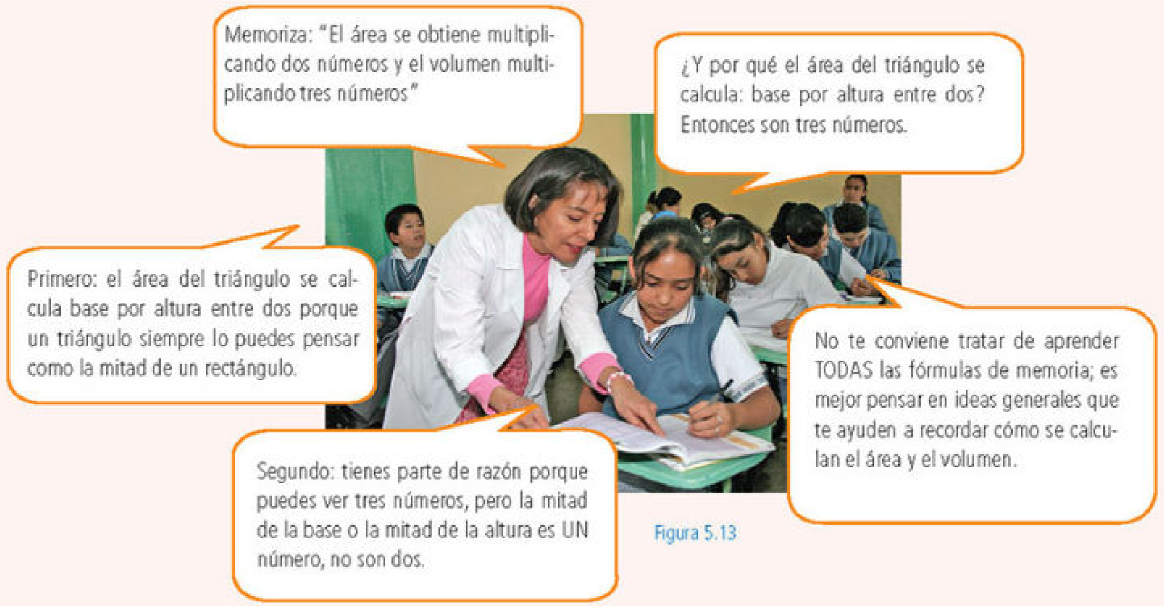


Figura 5.13

Figura 5.14

Mariana y Juan continúan el diálogo.

Mariana: ¿Qué hacemos para calcular el volumen de un cilindro?
Juan: ¡Pues multiplicar la base por la altura!
Mariana: No me digas, y ¿cuál es la base?
Juan: La base es un círculo; espera, el cilindro tiene dos bases, ¿y una cara curva?
Mariana: Pues si así piensas está bien, pero el cilindro tiene tres lados y dos aristas; dos lados son círculos y el otro es una curva. A ver, dibuja el desarrollo plano del cilindro.

Ayuda a Juan a dibujar el desarrollo plano de un cilindro; hazlo en tu cuaderno.

Comenten entre todos las descripciones de cilindro de Juan y Mariana. Lleguen a un consenso.

Mariana: Mira, este cilindro tiene una altura de 15 cm y el radio del círculo mide 8 cm. Calcula su volumen.
Juan: Está bien, sólo recuérdame la fórmula para calcular el área del círculo; ¿era pi por cuánto?
Mariana: Pi por el cuadrado del radio.
Juan: Es 15 por 8 por 8 por 3.1416; a ver 64 por 10 da 640 más 320, tengo 960, 960 por 3 son como 2 900.
Mariana: Yo creo que es un poco más porque no incluiste 0.1416; debe ser más que 3 000.

a) Comenten qué fue lo que hizo Juan para obtener su resultado.
b) Primero hagan una estimación, después, con lápiz y papel, resuelvan la multiplicación sugerida por Juan y verifiquen quién obtuvo el resultado más cercano al obtenido mediante el cálculo con lápiz y papel.

Pareja

2 Dibujen una circunferencia en una hoja de papel. Señalen un punto sobre ella. Piensen en que por ese punto se levanta un segmento perpendicular al círculo y trácenlo del tamaño que quieran. Imaginen que el punto y el segmento correspondiente se empiezan a mover sobre la circunferencia hasta dar una vuelta completa.

a) ¿Cuál es el cuerpo que se genera con este movimiento?

Esta es otra descripción de un cilindro. El segmento que recorre la circunferencia manteniéndose siempre perpendicular al plano que la contiene se llama generatriz del cuerpo correspondiente.

Dibujen otra circunferencia. Tracen un segmento que pase por el centro de la circunferencia C y sea perpendicular al círculo; llamen B al extremo de ese segmento. Tracen el radio de C a un punto cualquiera sobre la circunferencia y llámenlo P. Por último tracen el segmento que une los puntos P y C. Imaginen que el triángulo BCP empieza a girar alrededor de la circunferencia hasta dar una vuelta completa.

b) ¿Qué cuerpo se genera con este movimiento?

____

c) ¿Cuál podría ser la generatriz en este caso?

____

TIC

Para estudiar un poco más acerca de los números vean todos juntos el video que se encuentra en la dirección:

http://www.youtube.com/watch?v=9J1aMlhuExE.

Intercambien ideas acerca de lo que vieron y de sus respuestas a las preguntas.

Grupo

3 Entre todos hagan lo que se pide a continuación. Dibujen tres cilindros con los programas Cabri o Geogebra, o bien háganlo en el pizarron.

a) En el primero, inscriban en la base inferior un cuadrado con vértices c_1, c_2, c_3 y c_4. En cada vértice levanten una perpendicular hasta la base superior; la intersección de los segmentos y la base son cuatro puntos,

llámenlos c_1', c_2', c_3' y c_4' respectivamente. ¿Qué cuerpo se forma con esta estructura? ______________. ¿Cómo será el volumen de este cuerpo en comparación con el del cilindro? ________ . Escriban la fórmula para calcular el volumen de este poliedro ___________.

b) En el segundo cilindro, inscriban en la base inferior un octágono; en cada vértice levanten una perpendicular hasta la base superior. ¿Qué cuerpo puede formarse con esta estructura? ________________. ¿Cómo será el volumen de este cuerpo en comparación con el del cilindro? ___________________ . Escriban la fórmula para calcular el volumen de este poliedro ____________________________.

c) En el tercer cilindro, inscriban en la base inferior un dodecágono y hagan lo mismo que en los dos dibujos anteriores. ¿Qué cuerpo puede formarse con esta estructura? _______________. ¿Cómo será el volumen de este cuerpo comparado con el del cilindro? ________. Escriban la fórmula para calcular el volumen de este poliedro _________.

Si el número del lado de la base (polígono regular) del prisma recto aumenta, ¿el volumen del prisma recto se aproxima al volumen del cilindro?

d) Discútanlo y escriban la conclusión a la que llegaron.

____

e) Escriban cómo se calcula el volumen de un prisma recto con base de un polígono regular. ______________________________________

¿Es verdadera la siguiente afirmación?: El cilindro es como un prisma recto, cuya base es un polígono regular de un número muy grande de lados, donde cada lado prácticamente ya no se diferencia del arco de circunferencia correspondiente. Tomando eso en cuenta escriban en el siguiente recuadro la fórmula para calcular el volumen de un cilindro:

Situación problemática

Individual

Juan y Mariana siguen trabajando.

Juan: Oye, Mariana, los tanques de agua de las casas tienen forma de cilindro, ¿cómo sabemos cuánta agua tienen conforme se van llenado?
Mariana: No lo sé, pero podemos hacer cuentas. El tanque de mi casa tiene

un radio como de 44 cm; entonces el área es: 44 cm 44 cm 3.1416, esto es 6 082 cm^2. Cuando el nivel del agua llegue a 1 cm de altura, ¡pues tendrá 6 082 cm^3 de agua! Recuerda, un cubo que mide 1 m por lado contiene 1 000 litros de agua. Usando la regla de tres que aparece a continuación sabremos cuántos litros son 6 082 cm^3:

$$\frac{1000\ l}{x} = \frac{10^6\ \text{cm}^3}{6\,082\ \text{cm}^3},$$

Lo que significa que cuando el nivel del agua sea de 1 cm de altura habrá 6.082 litros de agua en el tanque.

Completa la Tabla 5.3 para saber cuánta agua tiene el tanque de la casa de Mariana conforme se va llenando.

Tabla 5.3

Altura en cm	1	2	3	15	25	50	83	95	100
Litros de agua									

Mariana: A ver si ya aprendiste. Escribe una fórmula para calcular el volumen de un cono.

Juan: Sí, lo voy a hacer de tarea en mi cuaderno. Oye, pero mi cono es como parte de un cilindro, ¿cómo puede construirse un cilindro que tenga la misma base y la misma altura que un cono?

Éste es tu proyecto: consigue un cono de papel de los que se usan para tomar agua, como el de la Figura 5.15, y construye un cilindro que tenga la misma base y la misma altura.

Figura 5.15

Lección 4

Estimar y calcular el volumen de conos y cilindros

En esta lección aprenderás a estimar y calcular el volumen de cilindros y conos: a calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.

Conocimientos previos

Lean lo que hicieron en la escuela secundaria de Tere y respondan lo que se solicita. El equipo de Tere (Figura 5.16) construyó un cilindro que tiene la misma área de la base que el cono de papel y, por supuesto, ambos tienen la misma altura.

Tere: ¡Al fin! Nos costó trabajo pero ya lo hicimos. Medimos, cortamos, tratamos de usar un hilo para medir la altura y el perímetro de la base del cono...

Pedro: ¡Hasta el teorema de Pitágoras usamos para calcular la altura!

Ricardo: Fue fácil dibujar la circunferencia de la base del cono, pero encontrar el centro ya no tanto. A José se le ocurrió dibujar dos... ¿secantes?, bueno éste es su dibujo.

Figura 5.16

1 Mide con una regla el radio del círculo que dibujó José (Figura 5.18) y calcula el área y el perímetro de la circunferencia. Anota tus resultados:

____

El círculo que dibujó José es del mismo tamaño que el del cono de papel para tomar agua.

Figura 5.17

Sí, es cierto lo que dice el libro: "El volumen de un cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma altura y la misma base" Tere trajo harina y con eso lo comprobamos.

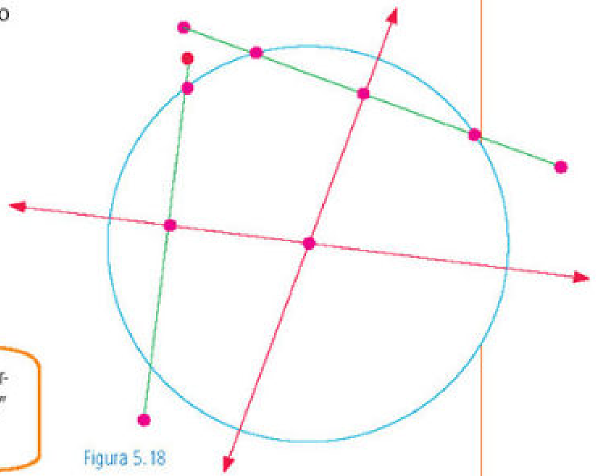


Figura 5.18

Las fotografías de la Figura 5.19 muestran el procedimiento que el equipo de Tere siguió para verificar que el volumen de un cono es la tercera parte del cilindro que lo contiene. Claro que el cono y el cilindro tienen la misma base y la misma altura.

2 Las fotografías se cayeron y se mezclaron, ordénalas colocando el uno a la primera, el dos a la segunda y así sucesivamente.

Figura 5.19

3 ¿Cuántos conos llenos de harina usó el equipo de Tere?_____________

4 Después de ordenar la secuencia de fotografías explica a tus compañeros cómo lo hicieron y argumenta por qué con esa secuencia se muestra que el volumen del cono es la tercera parte del cilindro que lo contiene.

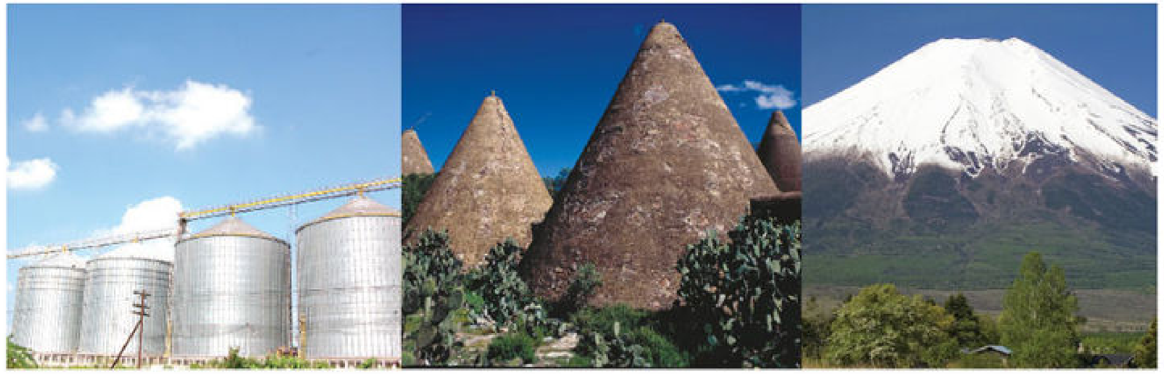
Escribe la fórmula con la que puede calcularse el volumen del cono:

____

____

5 Con la fórmula que encontraste y el valor de la altura del cono de papel, con el que trabajaron al final de la lección en la que aprendiste cómo calcular el volumen de un cilindro, calcula el volumen del cono de papel. ¿Qué cantidad de agua tomarías si te la sirvieras en ese cono de papel? _______________ ¿Cuántos conos de papel llenos de agua deberías tomarte para beber 250 ml? __________________________

Seguramente sabes que se construyen varios tipos de recipientes con la forma de cilindros, conos o combinaciones de estos cuerpos geométricos y que les damos diferentes usos (Figura 5.20). Además de para guardar agua en tinacos y cisternas, las dos fotografías que aparecen a continuación muestran otros usos de edificaciones donde pueden distinguirse cilindros, conos y conos truncados. La tercera foto muestra que estos cuerpos también se encuentran en la naturaleza.



Silos de metal — Silos de Zacatecas — Fujiyama

Figura 5.20

6 Intercambien ideas acerca de para qué se utilizan esas construcciones. Traten de recordar otras construcciones que usan estas formas.

Situación problemática

Recuerda que el volumen de un cilindro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

Individual

Resuelve los siguientes problemas.

1 Un tanque cilíndrico para almacenar agua tiene una capacidad de 850 litros. Su diámetro mide 1 m, ¿cuánto mide su altura? __________. ¿Para cuantos días te alcanzaría esa cantidad de agua? ______________

2 Un tanque cilíndrico mide 70 cm de diámetro y tiene por altura 65 cm, ¿cuántos litros tiene de capacidad? ______. ¿Esta cantidad de agua le alcanzará a una familia de cinco personas durante un mes? _____. ¿Por qué?

3 Una cisterna cilíndrica tiene 1 500 litros de capacidad. Su altura es de 1.23 m, ¿cuánto mide su diámetro? ________. Esa cantidad de agua le dura 10 días al dueño de la cisterna. ¿Cuál será su consumo diario de agua? ______. ¿Es mucho? ________________________

4 ¿Cuántas toneladas de granos de maíz pueden guardarse en silos con 7 m de diámetro y alturas de 5 y 13 m? ________ y ________

5 ¿Cuáles serían las capacidades de los silos con 8 m de altura y diámetros de 6 y 14 m? ______________________________

6 El volcán Popocatépetl tiene forma cónica, ¿cuál es su volumen en kilómetros cúbicos?______________________________

Calcula las siguientes medidas del volcán Popocatépetl:

- El área de la base.______________________________
- La altura, pero no la altura sobre el nivel del mar, sino su altura tomando como referencia la comunidad de Santiago Xalitzingo (busca en internet la localización de Xalitzingo; puedes calcular la altura de dos formas, los resultados no son iguales pero ambos sirven para propósitos prácticos).
- Encuentra un valor aproximado del volumen del Popocatépetl.

7 Los silos de Zacatecas de la figura 5.20 en la página 241 miden 5 m de altura y su base mide 3.5 m. Con estos datos, calcula el volumen total de uno de ellos.

8 La cantidad de grano que tiene un depósito cilíndrico de 1.5 m de diámetro y 1.3 m de altura tiene que vaciarse en un depósito cónico, ¿cuánto deben medir la altura y el diámetro del cono?______________________

9 Comparen entre todos sus respuestas a los problemas. Contrasten también los procedimientos que siguieron para resolver cada problema.

Lección 5

Situaciones problemáticas asociadas a otras disciplinas

Conocimientos previos

Quizás hayas escuchado la expresión "todo está en función de...", con la que se quiere decir que una cosa depende de otra. Y es que en muchas de nuestras actividades están presentes las funciones; por ejemplo, cuando vas a la tienda, el número de artículos que compres dependerá de la cantidad de dinero que tengas y el costo de fabricar el pan está en función del precio de la harina. Este tipo de relaciones también se da en los fenómenos científicos y las matemáticas. Por ejemplo, un biólogo sabe que la cantidad de bacterias (población) dependerá, entre otras cosas, del tiempo que permanezcan en un medio propicio para su reproducción y el área de un cuadrado está en función de la longitud de sus lados.

Cuando los valores de una cantidad (o magnitud) dependen de los valores de otra cantidad (o magnitud), decimos que la primera es función de la segunda. Recuerda lo aprendido en la lección 5 del bloque 1.

1 Resuelve lo siguiente:

a Escribe dos situaciones en las que una magnitud varíe como resultado de la variación de otra.

b Anota cuál es la función y explica por qué.

c Hagan una lista con las situaciones encontradas por todo el grupo y revísenla entre todos.

2 Las funciones se representan de varias formas: fórmulas, tablas y gráficas. Por ejemplo, la función $y = 2x + 4$ con los valores que se indican en la Tabla 5.4. Encuentra el valor que falta para que la igualdad se cumpla. Dibuja en tu cuaderno una tabla en la que indiques más valores para x.

x	y
1.5	
$\frac{3}{4}$	
	200

Tabla 5.4

En la expresión algebraica, a la magnitud a la que se asignan valores arbitrarios se le llama variable independiente; por lo general se denota con la letra x. La otra magnitud se llama variable dependiente: sus valores dependen de los valores que le demos a la variable independiente. Ésta suele denotarse con la letra y.

Situación problemática

Individual

1 Para que comprendas mejor la relación entre regla, fórmula y función, analiza el juego de los seis amigos.

Seis amigos, Juan, Rosa, Ricardo, Benito, Andrea y Martha, juegan como sigue:

Juan le dice un número a Rosa. Rosa le suma 2 y se lo dice a Ricardo. Ricardo le suma 3 y se lo dice a Benito. Benito lo multiplica por 4 y se lo dice a Andrea, que le suma 5 y se lo dice a Martha. Finalmente, Martha tiene que "adivinar" el número que Juan le dijo a Rosa.

a) Al principio Juan le dice el número 7 a Rosa. ¿Cuál es el número que Andrea le dijo a Martha? ______________________.

b) Juan le dijo el número 10 a Rosa. ¿Qué número le dijo Andrea a Martha? ______________________.

c) ¿Cuál es el número que Juan le dijo a Rosa, si el número que Andrea le dijo a Martha es el 45? ______________________.

d) ¿Cuál es el número que Juan le dijo a Rosa, si el número que Andrea le dice a Martha es el 105?

2 El juego puede representarse con una expresión algebraica.

a) Completa los pasos en la Tabla 5.5.

Juan le dice un número a Rosa	J
Rosa le suma 2:	
Ricardo le suma 3:	
Benito lo multiplica por 4:	
Andrea le suma 5 y se lo dice a Martha:	

Tabla 5.5

b) Vamos a representar con M el número que Andrea le dijo a Martha; obtenemos esta expresión:

$M =$ ______________________.

c) Escribe la expresión anterior en la Tabla 5.6 y complétala.

d) ¿Cuál es la variable dependiente? ______________.

e) ¿Cuál es la variable independiente? ______________.

J	M =
0	
	41
6	
	57

Tabla 5.6

3 El juego no es parejo, ¿no crees? Pero Martha, para ayudarse, utilizó las operaciones inversas que se ilustran en la Tabla 5.7.

Éste es el número que Andrea le dijo a Martha:	M
Andrea le sumó 5, así que ella los restó:	________
Benito lo multiplicó por 4; por lo tanto ella dividió entre 4:	________ = 2
Ricardo sumó 3; Martha restó:	$\frac{(\quad)}{4} = 2$
Rosa sumó 2; así que le restó 2:	$\frac{(\quad)}{4} = 2$
Si el número que Juan le dijo a Rosa lo representamos por J, la expresión algebraica es: $\frac{(\quad)}{4} = 2$	

Tabla 5.7

Compara la expresión que obtuviste con las de tus compañeros.

4 Escribe la expresión en la Tabla 5.8 y complétala.

M	$J =$
85	
125	
205	
1005	

Tabla 5.8

El juego de los seis amigos ilustra lo que es una expresión algebraica para representar una función. Para cada valor dado a la variable J se sabe cómo obtener el valor de la variable M y el valor de J se calcula sabiendo el de M.

En resumen, las funciones pueden representarse con:

Expresiones algebraicas. Ciertas funciones están dadas en una fórmula o regla que incluye una variable. Cuando esa variable se sustituye por un número, la fórmula o regla produce otro número: el valor de la función para el valor de la variable.

Tabla de valores. Una función también puede expresarse mediante una tabla que contenga sus valores, en la que en una columna ponemos los valores de la variable independiente y en otra, pero en el mismo renglón, los valores correspondientes de la variable dependiente.
Ahora haz el siguiente ejercicio para completar la Tabla 5.9:

$y = \frac{1}{2}x$ $\quad$ $y = -\frac{1}{x}$ $\quad$ $y = 4x - 5$ $\quad$ $y = 4x - 5$

x	y	x	y	x	y	x	y
-2		-2		-2		-2	
-1		-1		-1		-1	
0		0		0		0	
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	

Tabla 5.9

Comprendamos

Pareja

Uno de los ejemplos de función más sencillos e importantes es el que está representado con una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$. Con una expresión como ésta es posible modelar una gran variedad de fenómenos que aparecen en biología, química y física. En esta lección veremos la relación entre los grados centígrados y Fahrenheit.

Anders Celsius (1701-1744) propuso una escala para medir temperaturas a la que se llamó Celsius. La escala está basada en el punto de congelación y el punto de ebullición del agua. Gabriel Daniel Fahrenheit (1686-1736) construyó el primer termómetro preciso utilizando una escala que llamó grados Fahrenheit. Esta escala está basada en la temperatura de una solución congelada de agua con sal y en la temperatura del cuerpo humano.

1 En pareja, completen la Tabla 5.10.

Grados centígrados °C	Grados Fahrenheit °F
0	32
2	35.6
3	37.4
5	
10	50
20	
100	

Tabla 5.10

a) Si la temperatura en Celsius es de 1°, ¿cuál es la temperatura en Fahrenheit? ____________________.

b) Anoten una expresión algebraica que permita convertir grados centígrados en grados Fahrenheit. ____________________.

c) De las siguientes expresiones elijan aquella que sea equivalente a la que ustedes obtuvieron y que les permita convertir grados centígrados en grados Fahrenheit.

$°F = \frac{9}{5}\,°C + 32$ $\quad$ $°F = \frac{9}{5}\,°C - 32$ $\quad$ $°F = \frac{9}{5}\,(°C + 32)$

2 Completen la Tabla 5.11.

Grados centígrados °C	Grados Fahrenheit °F
32	0
34	$\frac{10}{9}$
	$\frac{15}{9}$
	$\frac{20}{9}$
41	
50	
100	

Tabla 5.11

a ¿Cuántos grados centígrados equivalen a 33 °F? ________________.

b ¿Cuántos grados centígrados aumentan por cada grado Fahrenheit; por ejemplo de 32 °F a 33 °F? ______________________________.

c De las siguientes expresiones elijan aquella con la que se puede convertir grados Fahrenheit en grados centígrados.

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32) \qquad °C = \frac{5}{9}°F - 32 \qquad °C = \frac{(°F - 32)}{\left(\frac{9}{5}\right)}$$

3 Imaginen que van a hacer un viaje a una ciudad que está fuera de nuestro país en la cual reportan una temperatura de 68 °F. Una cosa importante que deben llevar es la ropa adecuada para no sufrir frío o calor innecesariamente.

a ¿Tendrían que llevar suéter? ______________________________.

b Si a partir de los 18 °C se considera un clima cálido, ¿cómo es el clima en ese lugar?

____.

c En expresiones algebraicas en las que encuentran al menos un valor que no cambia, éste se llama constante. ¿Cuántas constantes hay en las fórmulas anteriores?______________________________.

4 Un taxi cobra $26.50 por el "banderazo" y $3.50 por cada kilómetro recorrido.

a Completen la Tabla 5.12 con el costo de los viajes.

b Completen la expresión que representa el costo de un viaje en función del número de kilómetros.

y = ________ x + ___________

Comparen su expresión con la de sus compañeros. Comenten cómo pueden verificar que escribieron la expresión correcta.

Kilómetros recorridos	Costo del viaje
1	
2	
3	
4	
5	
10	
24	

Tabla 5.12

Integremos

Individual

Entre los ratones de ciudad y los de campo existen algunas diferencias en cuanto a sus tendencias reproductivas. En la ciudad una pareja de ratones puede tener entre cinco y seis crías en una sola camada; en el campo la camada es mayor pues consta de entre ocho y once ratoncitos. En el campo suelen tener dos camadas al año y en la ciudad cuatro, pero en cautiverio pueden tener hasta 12.

1 Una pareja de ratones en cautiverio tiene cinco crías en cada camada. Completa la Tabla 5.13.

a Completa la expresión que represente el número total de ratones de ciudad que nacen al reproducirse una pareja si en cada camada tienen cinco crías.

y = ________ x + ___________

b ¿Qué representa la literal x?

____

c ¿Qué representa la literal y?

____

d ¿Cuáles son las constantes que aparecen en la expresión?

____

e ¿Qué representa cada una de esas constantes?

____

Camadas	Total de ratones
0	2
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 5.13

2 Una pareja de ratones de campo tiene nueve crías en cada camada. Escribe una expresión que represente el número total de ratones de campo.

_______________.

a Explica qué representa cada una de las literales que utilizaste.

_______________.

b Una pareja de ratones en cautiverio tiene 12 crías en cada camada. Escribe una expresión que represente el número total de ratones.

_______________.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

3 ¿Te has dado cuenta de que existe un pago fijo por el servicio telefónico al cual se le llama renta fija? Por la renta fija que se cobra, el usuario tiene derecho a cien llamadas locales, pero cuando esta cantidad es mayor se paga $1.48 por cada llamada adicional.

Completa la Tabla 5.14 con diferentes cantidades de llamadas adicionales.

Llamadas adicionales	Importe adicional	Total a pagar
5	$7.40	$163.95
39		
0		
52		
25		
12		
6		

Tabla 5.14

a Si escribimos con la letra y el total y con x el número de llamadas adicionales, ¿por cuánto hay que multiplicar a x para obtener el importe adicional? _______________.

b Anota una expresión que represente el total a pagar cuando hay llamadas adicionales.

$$y = ax + b$$

En estas lecciones resolviste diversas situaciones relacionadas con fenómenos de distintas disciplinas, las cuales se representan mediante una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$, donde una cantidad varía en función de la otra.

Apliquemos

1 Una fábrica de cemento tiene una camioneta para hacer la entrega de los sacos que vende. Cada saco de cemento cuesta $115 y por la entrega a domicilio se cobra $200.

Individual

Completa la Tabla 5.15 para calcular el costo de cada entrega.

Cantidad de bultos	Costo por los bultos	Total a pagar
5		
10		
12		
17		
20		

Tabla 5.15

a Escribe una expresión para representar el costo de cualquier entrega.

_______________.

2 Investiga las temperaturas registradas el día de hoy en cuatro estados de la República Mexicana. Expresa esas temperaturas en grados centígrados y en grados Fahrenheit.

a ¿Cuáles estados de la República Mexicana registran las temperaturas más bajas en esta época del año?

_______________.

b ¿Qué estados de la República Mexicana registraron temperaturas menores de 50 °F?

_______________.

c Investiga la temperatura en grados centígrados a la que hierven las siguientes sustancias: agua, alcohol etílico y nitrógeno.

d ¿Cuáles de esas sustancias hierven a más de 200 °F?

_______________.

3 Revisa las variaciones cuadráticas de la sección "Comprendamos" de la lección 5 del bloque 1 y haz lo mismo con cada una cómo se hace después con:

$$d = \frac{1}{2}gt^2$$

Lección 6

Valor esperado y juegos justos

En esta lección aprenderás a reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Conocimientos previos

Para un fenómeno aleatorio al cual se asignan valores a sus posibles resultados, el valor esperado es la suma de los valores asignados ponderados cada uno por la probabilidad del evento al que se le asignaron.

Al lanzar dos dados ordinarios se calcula la *diferencia absoluta* de los números de puntos de las caras que quedan hacia arriba.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Tabla 5.16

1. Anota en la Tabla 5.16 todos los posibles resultados. ¿Cuántos son? ____________. ¿Cómo son entre sí? ____________________
2. En la Tabla 5.17 anota en la primera fila las distintas diferencias absolutas posibles; en la segunda anota el número de posibilidades de cada una.
3. En la tercera fila anota la probabilidad de cada diferencia absoluta posible.
4. Lanza 36 veces dos dados. Para cada tirada marca la ocurrencia del resultado en la cuarta fila.

Posibles diferencias absolutas						
Número de posibilidades de cada una						
Probabilidad						
Tali						
Frecuencia absoluta en 36 tiradas						
Frecuencia relativa en 36 tiradas						
Frecuencia relativa en 180 tiradas						
|Frecuencia relativa180-probabilidad|						

Tabla 5.17

5. Para cada resultado posible cuenta los talis y anota en las filas quinta y sexta las frecuencias absolutas y relativas respectivas.
6. Reúne tus datos con los de otros cuatro compañeros y anota en la séptima fila de la tabla la frecuencia relativa con que obtuvieron cada diferencia absoluta en el total de 180 tiradas.
7. En la octava fila, anota cuánto se *desvía* de su probabilidad la frecuencia relativa de cada diferencia absoluta en las 180 tiradas. Es decir, *compara* (en valor absoluto) la frecuencia relativa de cada diferencia absoluta en las 180 tiradas con su probabilidad. ¿Cómo son entre sí, se parecen? _______. Discute tus respuestas con las de un compañero o compañera.
8. Calcula la media ponderada de las diferencias absolutas en las 180 tiradas: ______________________________ = ______
9. ¿La media ponderada es una de las diferencias absolutas posibles? ______. Explica: ______________________________
10. Anota en la Tabla 5.18 cuántas veces te parece que ocurriría cada diferencia absoluta posible, si lanzaras 360 veces los dos dados.

Posibles diferencias absolutas						
Número anticipado de veces						

Tabla 5.18

11 Discute con un compañero y responde qué diferencia absoluta esperarías en un solo lanzamiento de los dos dados. _____ ¿Por qué? ________

____

En esta sección, a cada posible resultado del fenómeno aleatorio de *las caras que quedan hacia arriba al lanzar dos dados*, se asignó la diferencia absoluta de los números de puntos de las dos caras, es decir, el valor de la diferencia sin importar su signo.

Glosario

Valor esperado: el valor esperado es la suma de los productos de cada valor asignado posible por su probabilidad.

12 Calcula el valor esperado de la diferencia absoluta al lanzar dos dados sumando los productos de cada diferencia absoluta posible por su probabilidad:

$0 \times$ ___ $+ 1 \times$ ___ $+ 2 \times$ ___ $+ 3 \times$ ___ $+ 4 \times$ ___ $+ 5 \times$ ___ $=$ ________

13 ¿Es el valor esperado una diferencia absoluta posible? _________

14 Compara tu resultado con los de los incisos 11 y 12. ¿Se parecen o son muy distintos? _________ ¿A qué lo atribuyes? ________________

____

Situación problemática

Individual

Para esta sección, necesitarás fichas a manera de un peso; o en su lugar prepara tarjetas cada una con valor de un peso.

En el juego de dados conocido como "siete" se lanzan dos dados y se suman los puntos en las caras superiores. Se apuesta a "falta", o sea a que la suma sea menor a siete; o se apuesta a "se pasa", o sea a que la suma sea mayor a 7. Para la suma 7 gana la casa. El ganador recibe el doble de la cantidad apostada en el juego. Los perdedores pierden la cantidad que apostaron. ¿Cuál es el valor esperado del pago por cada peso apostado?

Sigue las instrucciones, contesta las preguntas y completa los enunciados.

Tabla 5.19

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

a) Anota en la Tabla 5.19 todos los posibles resultados.

b) Indica las sumas posibles de la apuesta a "falta" y su número de posibilidades: ______________________________

c) Indica las sumas posibles de la apuesta a "se pasa" y su número de posibilidades: ______________________________

d) ¿Cómo son entre sí los eventos "falta", "se pasa" y "la casa gana"?

____

e) Por ser los eventos "la casa gana" y "se pasa" ______________, la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es la __________ de sus probabilidades, o sea P("la casa gana" o "se pasa") = ________

f) Organízate con otros dos compañeros. Designen a uno como "la casa" y a los otros dos como jugadores. El encargado de la casa lanzará 36 veces dos dados. Cada vez, los "jugadores" anticiparán si le apuestan a "falta" o a "se pasa". Cada apuesta será de un peso.

g) En la Tabla 5.20 marca cuál evento ocurrió en cada tirada. Anota al final el total de ocurrencias de cada evento en las 36 tiradas y su frecuencia relativa.

"Falta"	"La casa gana"	"Se pasa"
Total:	Total:	Total:
Frecuencia relativa:	Frecuencia relativa:	Frecuencia relativa:
Probabilidad:	Probabilidad:	Probabilidad:

Tabla 5.20

h) Anota en la última fila de la tabla la probabilidad de que ocurra cada evento. Compárala con la frecuencia relativa respectiva.

i) ¿Cuál fue tu ganancia en las 36 tiradas? _______. Por cada peso que apostaste, ¿cuánto ganaste? _____ Explica: ______________

____

j) Cuando ganas en una tirada cualquiera, ocurre el evento al que le apostaste, o lo que es lo mismo, no ocurren los otros dos indicados en la tabla. A ese evento se le asigna el valor _________ de tu ganancia y a los otros dos se les asigna el valor ______________.

k La probabilidad de que ganes es __________. La probabilidad de que no ganes es _______________________.

l Completa los dos miembros de la siguiente igualdad para la ganancia esperada por cada peso apostado:

$$\_\_\_\_ \times 1\,536 + \_\_\_\_ \times 2\,136 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Comprendamos

Pareja

Un concursante participa en un juego radiofónico con estas reglas:

- gana \$1000.00 si contesta a la primera pregunta seleccionando la opción correcta de entre cuatro opciones propuestas;
- si no, gana \$100 si selecciona para la segunda pregunta la opción correcta de entre tres propuestas;
- si no, si contesta a la tercera pregunta con la opción correcta de entre dos opciones nada gana, pero si escoge la opción incorrecta debe pagar \$50.

Cada vez el concursante contesta al azar y el juego termina cuando da una respuesta correcta.

a ¿Cuál es la probabilidad de que el concursante dé una respuesta correcta?

b ¿Qué ganancia puede esperar?

En pareja discutan cada inciso, acuerden las respuestas y preséntenlas ante el grupo.
Denoten con C_1 al evento de que el concursante contesta correctamente a la primera pregunta, con C_2, a la segunda y con C_3, a la tercera. Usen el superíndice "c" para denotar los eventos complementarios.

1 ¿Cuál es la probabilidad de C_1? ______________________

2 ¿Cuál es la probabilidad de que el concursante gane \$1 000? ________

3 Describe el evento C_1^c: ______________________

4 ¿Qué tiene que ocurrir para que suceda C_2?
____
____

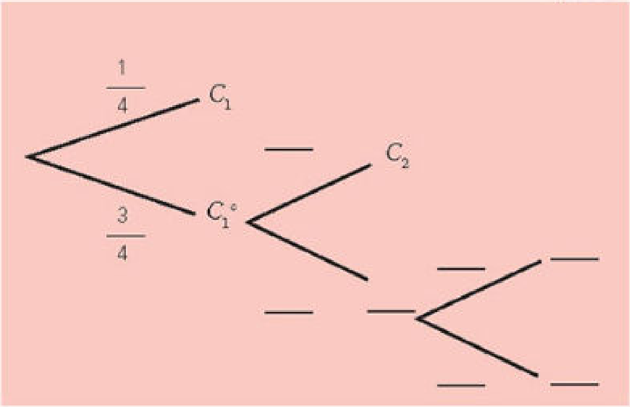
5 Describe el evento C_2^c: ______________________

6 ¿Qué tiene que ocurrir para que suceda C_3?
____
____
____

7 Describan el evento C_3^c: ______________________

8 Completen el diagrama de árbol (Figura 5.21) siguiente anotando los eventos faltantes en las ramas terminales. Anoten también en las ramas las probabilidades correspondientes.

Figura 5.21



Ganancia
\$1000
_____
_____
_____

Probabilidad
$P(C_1) = 14$
$P(C_2) = \frac{3}{4} \times \_\_ = \_\_$
____
____

9 En la columna central anoten las ganancias del concursante correspondientes a las ramas terminales del diagrama de árbol.

10 Completen la columna de la derecha y calculen las probabilidades respectivas.

11 ¿Cómo son entre sí los eventos C_1, C_2 y C_3?__________ ¿Por qué?
____

12 ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos?
____

13 Expresen el evento de que el concursante dé una respuesta correcta en términos de C_1, C_2 y C_3: ______________________

14 Contesten el inciso a) planteado en el problema: ______________

15 Con los datos de los incisos 9 y 10 calculen la ganancia esperada del concursante:

$$(\$1\,000 \times P(C_1)) + (\$100 \times \_\_\_) + (0 \times \_\_\_) + (\_\_\_ \times P(C_3^c)) = \_\_\_\_\_\_$$

16 ¿La ganancia esperada es una de las ganancias anunciadas en el concurso? _____ Entonces, ¿qué quiere decir esa cifra? ___________________

17 ¿Le conviene el juego al concursante? _______. ¿Por qué? ____________

El valor esperado de una asignación numérica a un fenómeno aleatorio es un promedio que resultaría "a la larga", luego de muchas repeticiones del fenómeno aleatorio.

Integremos

Individual

En un juego se extrae al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y nueve negras. Si el juego es justo y se apuesta a que la bola extraída sea blanca, ¿cuánto se debe recibir en caso de ganar?

1 Anota qué entiendes por "juego justo" y discútelo con un compañero:

2 ¿Cuál fenómeno aleatorio plantea el problema? ___________________

3 ¿Cuál es el espacio muestra asociado a ese fenómeno? ______________

4 ¿A cuál evento se apuesta en el juego? ___________________________

5 ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ______________________________

6 ¿Cuál es la probabilidad de perder? ______________________________

7 Completa las siguientes relaciones:

$P(ganar) =$ _____; $P(perder) =$ ____ $= 9 \times$ _____ $= 9 \times P(ganar)$.

8 ¿Cuántas veces es mayor la probabilidad de perder que la de ganar? ___. ¿Esto es una ventaja o una desventaja para el jugador?

9 Si apostaras $100 pesos a que sale bola blanca, ¿cuánto supones que recibirías si saliera efectivamente la bola blanca? ______. ¿Por qué? _____

10 Con la cantidad que supusiste ganar, calcula el valor esperado:

__________ $\times P(bola\ blanca) - \$100 \times P(bola\ negra) =$ ______________

Un "juego justo" establece para todos sus jugadores las mismas oportunidades de victoria. Luego, en muchas repeticiones del juego se esperaría ganar, más o menos, tantas veces unos jugadores como los otros, es decir, se esperaría ganar tantas veces como perder. Por tanto, se esperaría, en promedio, una ganancia cero.

Si el valor esperado es negativo, el juego es desfavorable. Si el valor esperado es positivo, el juego es favorable.

11 Si llamamos x a la ganancia que se tendría al apostar $100 a que sale bola blanca y si el juego es justo, entonces:

$$x \times P(bola\ blanca) - \$100 \times P(bola\ negra) = 0$$

Determina el valor de x: ______ ¿Difiere del valor del inciso 10? ______

En un juego justo, por cada peso apostado se deben entregar al ganador tantos pesos como la probabilidad de perder sea mayor que la de ganar.

Apliquemos

Pareja

1 Cada uno de dos jugadores A y B lanza un dado. Se calcula la diferencia absoluta de los resultados. El jugador A gana si la diferencia es 0, 1 o 2; de otra forma, gana el jugador B. ¿El juego es justo?

En pareja revisen la tabla 5.17 que completaron en la página 251 de esta lección y discutan sus respuestas a cada inciso.

a ¿Cuántas posibilidades corresponden al evento de que A gane? ____

¿Cuál es la probabilidad de que A gane? P(A) = ________________

b ¿Cuántas posibilidades corresponden al evento de que B gane? _______________. ¿Cuál es la probabilidad de que B gane? P(B) =

c ¿Tienen los jugadores A y B las mismas condiciones para ganar? ___ ¿Es justo el juego? ____ ¿Qué pasaría si A y B apostaran lo mismo y recibieran lo mismo al ganar bajo esas condiciones? ____________

d Establezcan una relación entre P(A) y P(B) que exhiba las condiciones del juego: ______________________________

e. Por cada peso que B apueste, ¿cuánto debería recibir bajo esas condiciones? _____. Expliquen su respuesta:

f. Con la condición de esa ganancia para B, ¿cómo le es el juego? _________. ¿Cómo es el juego para A? _____________. ¿Cuánto debería recibir A por cada peso cada vez que ganara? ___________

2 Luis apuesta $1 a que caerá águila en un volado.

a. ¿Cuál es el valor esperado del juego?

b. ¿El juego le es favorable, desfavorable o es un juego justo?

i. ¿Cuáles son los posibles resultados del volado?

ii. ¿Cuál asignación numérica establece el juego?

iii. Para el inciso a), calculen el valor esperado:

iv. Para b), ¿cómo califican el juego? ________. ¿Por qué?

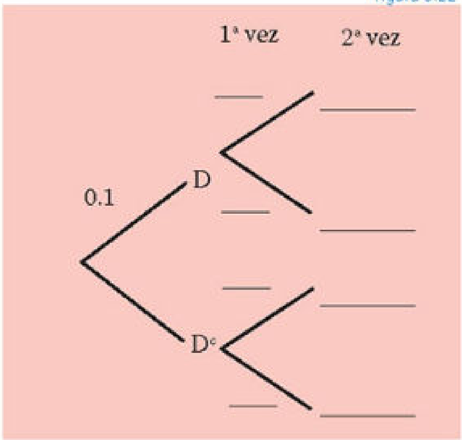
Individual

3 Para cada pedido, José debe utilizar dos veces una máquina embotelladora con probabilidad de descompostura 0.1 cada vez que la usa. Las descomposturas son independientes entre sí. Si se descompone la máquina, el costo de una reparación es de $5 000. ¿Cuál es el gasto esperado por reparación?

a. Utiliza "D" para el evento "se descompone la máquina". ¿A qué corresponde "D^c"? ___________ ¿Cuál es la probabilidad de D^c?

b. Completa el diagrama de árbol (Figura 5.22) siguiente con los eventos y sus probabilidades respectivas sobre las ramas.

Figura 5.22



Número de descomposturas	Probabilidad	Gasto por reparación

Tabla 5.21

c. Completa la tabla a la derecha del diagrama de árbol y, con sus datos, calcula el gasto esperado por reparaciones:

TIC

1. Registra en una tabla los números de: a) partidas necesarias, b) ganancias y c) pérdidas, en cada una de 10 simulaciones, con p = ½ e igual tope de ganancias que de pérdidas, que efectúes en el sitio.
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_ruina.htm
2. De tus datos de las simulaciones, con los totales de partidas para ganancias y para pérdidas, calcula la media ponderada de las ganancias.
3. Propón un fenómeno aleatorio que corresponda a las simulaciones.

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, al terminar muéstralos a tu profesor para su evaluación.

1. Lee con atención y resuelve lo que se te pide.

Esculturas de luz

Anthony McCall es un artista del Reino Unido quien presentó el 24 de abril de 2012 su nueva exposición "películas de luz", donde al entrar se pueden disfrutar de enormes conos de luz que parecieran atravesar una caja negra, como se puede apreciar en la imagen.

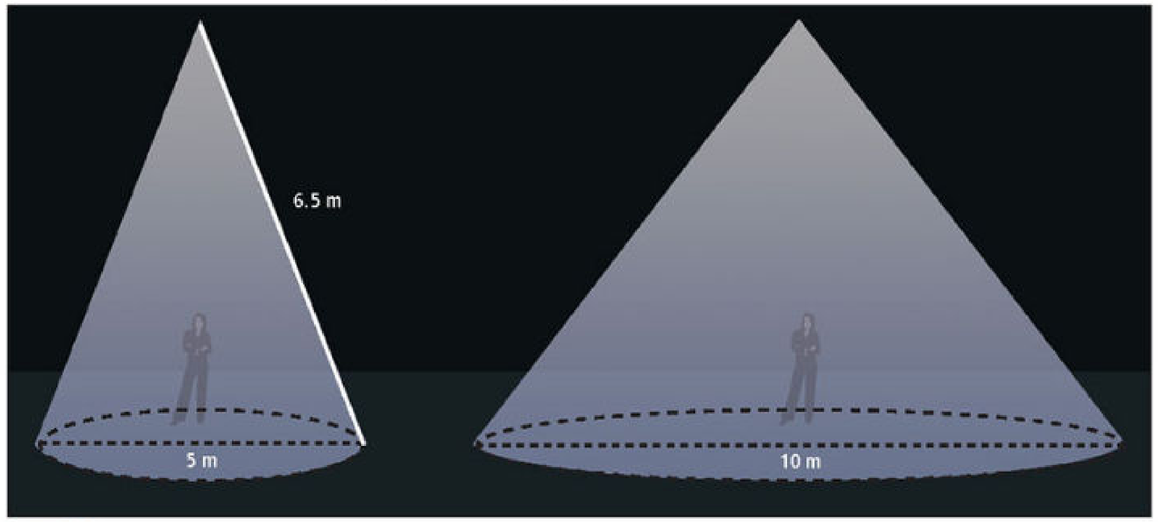


Figura 5.23

a) Un cilindro circular recto y uno de los conos circulares rectos de la imagen tienen el mismo volumen. Si las alturas de ambos cuerpos son iguales, ¿cuál es la relación de los radios de sus bases?

- El radio del cilindro es una tercera parte del radio del cono
- El radio del cilindro es el doble del radio del cono
- El radio del cilindro es el tiple del radio del cono
- El radio del cilindro es la mitad del radio del cono

b) El diámetro del cono más pequeño mide 5 m y su generatriz mide 6.5 m. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyas medidas de la altura y el radio son las mismas? Subraya la opción correcta.

47.10 m^2 117.75m^2 18.84 m^2 94.2 m^2

c) ¿Cómo es el volumen del segundo cono si su diámetro es el doble del primer cono y su altura es la misma? Subraya la opción correcta.

Es el doble Es la mitad Es el triple Es el cuádruple

2. Se llenará el recipiente con un chorro de agua constante, ¿cuál de las gráficas de abajo representa la manera en que varía el nivel del agua en el recipiente mientras se llena?

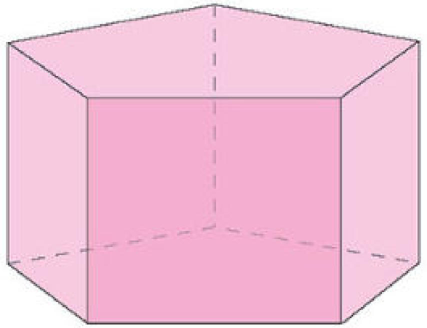


Figura 5.24

Gráfica 5.1 A

Gráfica 5.1 C

Gráfica 5.1 B

Gráfica 5.1 D

3. **Dibuja debajo de cada gráfica un recipiente que cumpla con dicha gráfica cuando se esté llenando.**

Gráfica 5.2 A

Gráfica 5.2 B

Gráfica 5.2 C

4. **El siguiente recipiente está vacío; para llenarlo se utiliza una manguera que arroje una cantidad constante de agua.**

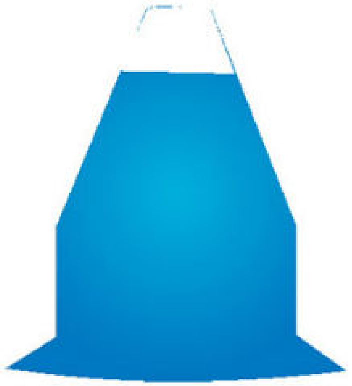


Figura 5.25

a) Traza el bosquejo de la gráfica que representa la variación del nivel del agua en el recipiente respecto al tiempo transcurrido.

5. El área de un rectángulo es 360 m² y el largo excede al ancho en dos unidades. Calcula el perímetro del rectángulo.

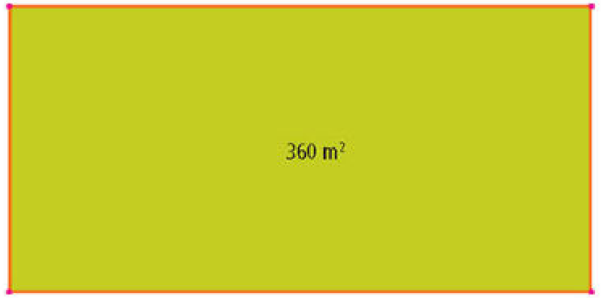


Figura 5.26

6. Completa la tabla siguiente para valores x y y de la función $y = x^2 + 4x + 1$

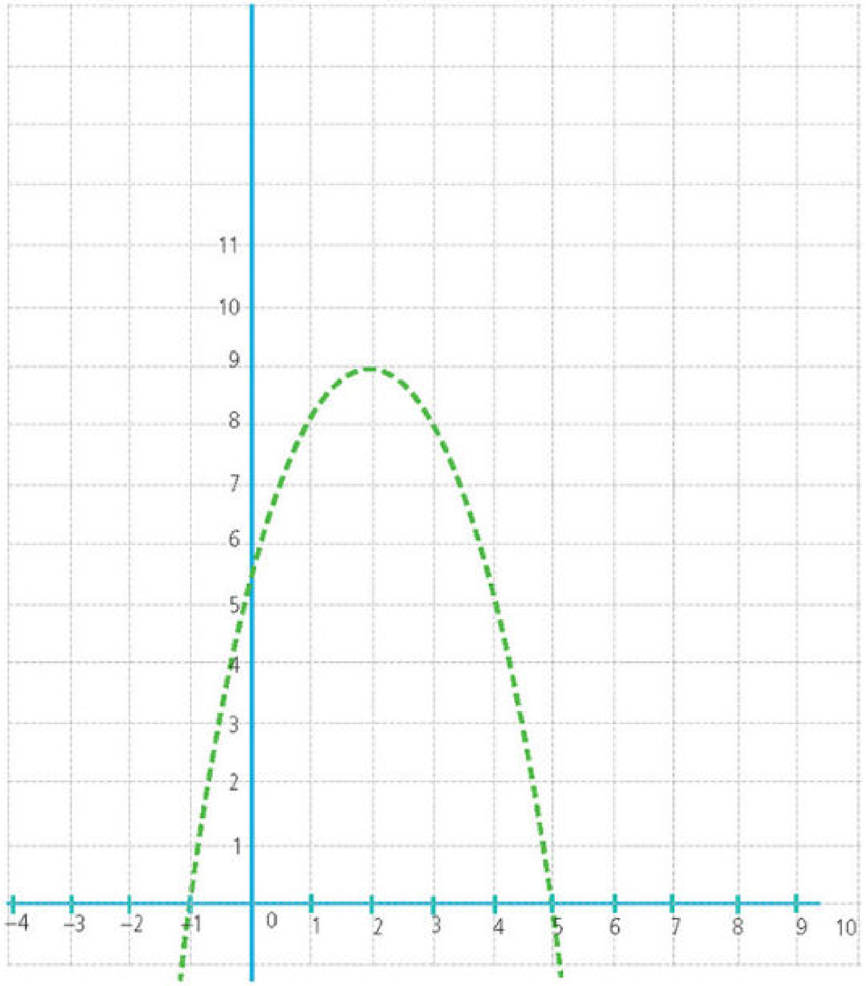
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y											

a El valor de y es 10 cuando x tiene los valores: _____ y _____.

b Verifica tu respuesta resolviendo algebraicamente la ecuación en el siguiente espacio.

c Traza en el recuadro siguiente la gráfica de la función.

7. La siguiente gráfica representa el número de enfermos de gripe, en el hospital central de la Ciudad de México, con la función: $y = -x^2 + 4x + 5$.



Gráfica 5.3

Responde las siguientes preguntas.

a ¿Durante cuántas semanas aumentó la gripe? ____________________

b ¿Qué día hubo más enfermos de gripe? _______ ¿Cuántos fueron? ____

c ¿En qué semanas no hubo gripe? ____________________

d ¿Cuántos días duró la gripe? ____________________

Bibliografía consultada

- Bresson, G., *Probabilités e statistiques*, Boulogne, Éditions R. Atlani, 1992.
- Fischbein, E., *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Holanda, Reidel, 1975.
- Hernández, O., *Elementos de probabilidad y estadística*, México, Fondo de Cultura Económica, 1978.
- Huot, R., *Méthodes quantitatives pour les sciences humaines*, Canadá, Les Presses de l'Université Laval, 2003.
- Isaac, R., *The pleasures of probability*, Nueva York, Springer-Verlag, 1995.
- Parzen, E., *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*, México, Limusa-Wiley, 1971.
- Steinbring, H., "The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge", *Educational studies in mathematics*, vol. 22, Holanda, Kluwer, 1991.
- Tijms, H., *Understanding probability*, Estados Unidos, Cambridge University Press, 2004.

Bibliografía para el alumno

- Aragón, B. M. y Santiago Valiente B., *En el amable mundo de las matemáticas*, México, Patria, 1981.
- Enzensberger, H., *El diablo de los números*, España, Siruela, 1997 (Séptima y octava noches).
- Guik, E. Y., *Juegos matemáticos recreativos*, Moscú, Mir, 1987.
- Perelman, Y., *Álgebra recreativa*, Moscú, Mir, 1986.
- Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, Barcelona, Verón Editor, 1972.

Bibliografía para el profesor

- Batanero, Ma. C., Juan Díaz Godino y Virginia Navarro Pelayo, *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis, 1996.
- Casanova, Ma. A., *Evaluación educativa*, México, Muralla-SEP, 1988 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Chevallard, I., *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 1997 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Clark, D., *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.
- Díaz Godino, Juan, Ma. C. Batanero y Ma. C. Cañizares, *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1981.
- Grupo Azarquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1993.
- Grupo Beta, *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid, Síntesis, 1990.
- Guedj, Denis, *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, España, Anagrama, 2000.
- Haigh, J., *Matemáticas y juegos de azar*, Barcelona, Tusquets Editores, 2003.
- Morris, K. (comp.), *Matemáticas en el mundo moderno. Selecciones de Scientific American*, México, Blume, 1974.
- Paenza, Adrián, *Matemática… ¿Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*, Argentina, Siglo XXI Editores, 2005.
- Paulos, J. A., *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático*, 3a. ed., España, Tusquets Editores, 2003.
- Phillips, J., *La lógica del pensamiento estadístico*, México, El Manual Moderno, 1980.
- Piaget, J. y B. Inhelder, *La génése de l'idée de hasard chez l'enfant*, París, PUF, 1951.
- Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1989.
- Sestier, A., *Historia de las matemáticas*, México, Limusa, 1972.
- Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 1988.

Sitios de internet y multimedia

- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado
  http://goo.gl/OzHEc

  El sitio ofrece una abundante cantidad de ejercicios y recursos didácticos que refuerzan el aprendizaje de los estudiantes en el aula y en su casa (consultado el 10 de julio de 2013).

- IXL Math
  http://www.ixl.com/math

  Aquí los estudiantes encontrarán, entre otras cosas, retos matemáticos y estadísticos que se deben resolver a contratiempo (consultado el 13 de marzo de 2013).

- Enzensberger, Hans Magnus. El diablo de los números. España. Ediciones Siruela. 1997.

  http://www.librosmaravillosos.com/eldiablodelosnumeros/index.html

  Este sitio muestra una forma más amigable de acercar a los estudiantes a las matemáticas (consultado el 10 de julio de 2013).

- SEED
  http://www.planetseed.com/es/node/27554

  Aquí los estudiantes podrán acceder a diferentes acertijos matemáticos relacionados con la probabilidad (consultado el 10 de julio de 2013).

Créditos iconográficos

- ©Shutterstock.com: pp. 45, 68, 85, 113, 233-234, 238, 241.
  ©agrega.educacion.es/galeriaimg/0c/es_20071227_1_ 5007544/ es_20071227_1_5007544: p 241.
- Ilustraciones: Miguel Macías y Miguel Lomelí Soto
- Ilustraciones de entradas de bloque: Dimage Creativos